

7536.aa.37

BOOK 2 Printed for Benjamin and Samuel Tople

CLASSIC



Algebra
Trigonometry
Geometry
Astronomy
Mechanics
Optics
Acoustics
Pneumatics
Aerology
Meteorology
Medicine
Law
Theology
Philosophy
History
Poetry
Rhetoric
Grammar
Logic
Mathematics
Natural Philosophy
Metaphysics
Ethics
Politics
Economics
Agriculture
Medicine
Law
Theology
Philosophy
History
Poetry
Rhetoric
Grammar
Logic
Mathematics
Natural Philosophy
Metaphysics
Ethics
Politics
Economics
Agriculture

Arithmetica Universalis

RESOLUTIO

DE COMPOSITIONE

ET

Resolutione Arithmetica

LIBER.



Algebra
Trigonometry
Geometry
Astronomy
Mechanics
Optics
Acoustics
Pneumatics
Aerology
Meteorology
Medicine
Law
Theology
Philosophy
History
Poetry
Rhetoric
Grammar
Logic
Mathematics
Natural Philosophy
Metaphysics
Ethics
Politics
Economics
Agriculture
Medicine
Law
Theology
Philosophy
History
Poetry
Rhetoric
Grammar
Logic
Mathematics
Natural Philosophy
Metaphysics
Ethics
Politics
Economics
Agriculture

BOOKS Printed for Benjamin and Samuel Tooke.

CLASSICKS.

Virgilii Opera.
Horatii Opera.
Terentii Comedie.
Tullii Orationes.
Ovidii Metamorph.
 — Epistolæ.
 — Factorum.
Phædri Fabulæ.
Lucii Flami.
Sallustii Historia.
Eutropii Historia.
Martialis Epigrammata.
Lucretius de Rerum Natura, by Cræch.
Cæsar's Commentarii.
Cornelius Nepos.
Corpus omnium Veterum Poetarum, 2 Vol. Fol.
Livii Historia, 5 Vol. 8vo.
Pantheon, or the History of the Heavhen Gods, 8vo.
Xenophon de Cyri Institutione, Gr. & Lat.
Cicero de Officiis, Minelli.
Planctus, 2 vol. 12mo.
Roy's Nomenclatura.
Latin Common-Prayer.
Latin Testament.
Synopsis Græcæ Linguae.
Institutiones Christianæ.
Theologia Christiana, 12mo.
Gruce Epigram. West. &c.
Cæsar's Comment. 12mo.
Homeri Ilias, Gr. & Lat.
Littleton's Dictionary.
Cole's Dictionary, Lat. 8vo. and English.

Delphini.

MISCELLANIES.

Mr. Collier's Church-History, 5 vol. Fol. compleat.
History of England, 2 vol. Fol.
State-Tryals, 4 vol. Fol. compleat.
By Burnett's History of the Reformation, 5 vol. Fol. compleat.
Cambridge Concordance, with a great many Additions.
All Dr. Barlow's Works.
Feltham's Resolves.
Dean Stoughton's Works.
Dedmon's Death.
Seaforth's Christian Pattern, 8vo.
Eschsch's Roman History, 5 vol. compleat.
Bow's Guide to Eternity.
Seneca's Morals.
Cæsar's Epitomy of the Common-Prayer.
Tillotson's Works, 5 vol. Fol. compleat.
Nelson's Feasts and Fasts.
Aldrich's Works compleat.
Tatlers compleat.



J. Chichester lry.

Arithmetica Universalis:
SIVE
DE COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.

EDITIO SECUNDA,
*In qua multa immutantur & emendantur,
nonnulla adduntur.*



L O N D I N I;

Impensis BENJ. & SAM. TOOKE, Bibliopolarum;
juxta Medii Templi Portam, in Vico vulgo vocato
Fleetstreet. MDCCXXII.

Arithmetica Universalis:
 SIVE
 DE COMPOSITIONE
 ET
 RESOLUTIONE
 ARITHMETICA
 L. I. R.



EDITIO SECUNDA.
 In qua multa emendata sunt & addita.
 nonnulla observantur.



LONDON:
 Impensis Bani & SAM. JOHNS. Bibliopolarum,
 juxta Mithi Templi Portam in Vico regio vocato
 MDCCLXXII.

ARITHMETICA UNIVERSALIS,
SIVE
De COMPOSITIONE & RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.

COMPUTATIO vel fit per *numeros* ut in vulgari Arithmetica, vel per *species* ut Analyſtis mos eſt. Utraque iisdem inniſitur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinite & univerſaliter; ita ut enuntiata ſere omnia quæ in hac computatione habentur, & præſertim concluſiones, *Theoremata* dici poſſint. Verum Algebra maxime præcellit quòd cum in Arithmetica Quæſtiones tantum reſolvantur progrediendo à datis ad quæſitas quantitates, hæc à quæſitis tanquam datis ad datas tanquam quæſitas quantitates plerumque regreditur; ut ad concluſionem aliquam, ſeu Equationem, quocumque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæſitam elicere liceat. Eoque pacto conſiciuntur difficillima Problemata quorum reſolutiones ex Arithmetica ſola fruſtra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita ſubſervit, ut non niſi unicam perfectam *computandi Scientiam* conſtituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Quiſquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum ſignificationes intelligat, & fun-

damentales addiscat operationes, Additionem nempe Subductionem, Multiplicationem, Divisionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Equationum, ac incognitas quantitates (ubi plures sunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad aequationes, exerceat; & ultimo naturam & resolutionem aequationum contempletur.

De Vocum quarundam & notarum significatione.

PER Numerum non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quæ pro unitate habetur rationem intelligimus. Estque triplex; integer, fractus & surdus: *Integer* quem unitas metitur, *Fractus* quem unitatis pars submultiplex metitur, & *Surdus* cui unitas est incommensurabilis. *Integrorum* numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter se necuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri in primo loco ante unitatem, sive ad sinistram, scripti denotant denas unitates, in secundo centenas, in tertio millenas, &c. sic numeri in primo loco post unitatem scripti denotant decimas partes unitatis, in secundo centesimas, in tertio millesimas, &c. Hos autem dicimus *Fractos Decimales* quod in ratione decimali perpetuo decrescant. Et ad distinguendum integros à decimalibus interjici solet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732,569, denotat septingentās trīginta duas unitates; una cum quinque decimalibus, sex centesimalibus, & novem millesimalibus partibus unitatis. Qui & sic 732,569, vel sic 732[.]569, vel etiam sic 732.569, nonnunquam scribitur. Atque ita numerus 5704[.]2083, denotat quinquaginta

Quinta septem mille, centum & quatuor unitates; una cum duabus decimis, octo millesimis, & tribus decimis millesimis partibus unitatis. Et numerus 9064 denotat sex centesimas & quatuor millesimas partes. Surdorum & aliorum fractionum notæ in sequentibus habentur.

Cum rei alicujus quantitas ignota est vel indeterminata spectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, solemus per speciem aliquam seu litteram designare. Et si quando cognitæ quantitates tanquam indeterminatas spectemus, discriminis causa designamus initialibus Alphabetæ litteris a, b, c, d , & incognitas finalibus z, y, x , &c. Aliqui pro cognitæ substituant consonantes vel majusculas litteras, & vocales vel minusculas pro incognitis.

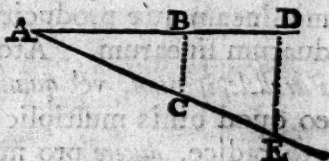
Quantitates vel Affirmativæ sunt seu majores nihilo, vel Negativæ seu nihilo minores. Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bonæ affirmativæ, debita vero bonæ negativæ. Inque motu locali progressus dici potest motus affirmativus, & regressus motus negativus, quia prior augeat & posterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometria, si linea versus plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur, negativæ erit quæ versus plagam oppositam ducitur. Veluti si AB dextrorsum ducatur, & BC sinistrorsum; ac AB statuatur affirmativa

tunc BC pro negativæ habebitur, eò quod interducendum diminuit AB; redigitque vel ad brevioræ AC, vel ad nullam si forte C inciderit in ipsum A, vel ad minorem nullam si BC longior fuerit quam AB de qua auferitur. Negativæ quantitati designandæ signum $-$, Affirmativæ signum $+$ præfigi solet. Signum $?$ incertum est, & signum $!$ etiam incertum sed priori contrarium.

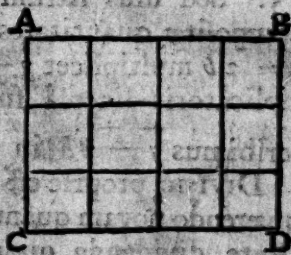
In aggregato quantitatum nota $+$ significat quantitatem suffixam esse ceteris addendam & nota $-$ esse subducendam. Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere solemus. Sic $2 + 3$, five 2 plus 3, valet summam numerorum 2 & 3, hoc est 5. Et $5 - 3$, five 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur subducendo 3 à 5, hoc est 2. Et $- 5 + 3$ valet differentiam quæ oritur subducendo 5 à 3, hoc est $- 2$. Et $6 - 1 + 3$ valet 8. Item $a + b$ valet summam quantitatum a & b : Et $a - b$ valet differentiam, quæ oritur subducendo b ab a . Et $a - b + c$ valet summam istius differentię & quantitatis c . Puta si a fit 5, b 2, & c 8; tum $a + b$ valebit 7 & $a - b$ 3 & $a - b + c$ 11. Item $2a + 3a$ valet $5a$. Et $3b - 2a - b + 3a$ valet $2b + a$; nam $3b - b$ valet $2b$ & $- 2a + 3a$ valet a , quorum aggregatum est $2b + a$. Et sic in aliis. Hæ autem notæ $+$ & $-$ dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur signum $+$ subintelligi debet.

MULTIPLICATIO propriè dicitur quæ fit per numeros integros, utpote quærendo novam quantitatem toties maiorem quantitate multiplicanda quoties numerus multiplicans sit major unitate. Sed aprioris vocabuli defectu Multiplicatio etiam dici solet quæ fit per fractos aut surdos numeros; quærendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantum fit per abstractos numeros sed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, superficies, motum localem, pondera, &c. quatenus hæ ad aliquam sui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere possunt, & vices supplere. Quemadmodum si quantitas A multiplicanda fit per lineam duodecim pedum, posito quod linea bipedalis sit unitas, producentur per istam multiplicationem

cationem 6 A, five sexies A, perinde ac si A multiplicaretur per abstractum numerum 6, siquidem 6 A sit in ea ratione ad A quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem. Atque ita si duas quasvis lineas AC & AD per se multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis, eo quod sit ad AD ut AC ad unitatem AB.



Quinetiam mos obtinuit ut genesis seu descriptio superficiei per lineam super alia linea ad rectos angulos moventem dicatur multiplicatio istarum linearum. Nam quamvis linea utcunque multiplicata non possit evadere superficies, adeoque hæc superficiei è lineis generatio longè alia sit à multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quod numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abstractum numerum unitatum in superficie lineis istis comprehensa, si modò Unitas superficialis definiatur, ut solet, Quadratum cujus latera sunt unitates lineares. Quemadmodum si



recta AB constet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD constabit quater tribus seu duodecim unitatibus quadratis ut inspicienti Schema patebit. Estque similis analogia solidi & ejus quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc vicissim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimensio*, *latus*, & similia quæ ad Geometriam spectant, Arithmeticis tribuantur operationibus.

rationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimensionum* non semper intelligimus superficiem, sed ut plurimum quantitatem alterius cujuscunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & sæpissime lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque ita dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimensionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *hanc* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & sic in aliis.

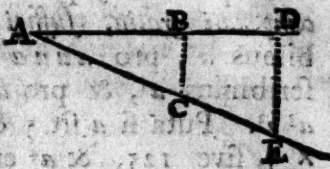
Numerus speciei alicui immediate præfixus denotat speciem illam toties sumendam esse. Sic $2a$ denotat duo a , $3b$ tria b , $15x$ quindecim x .

Dua vel plures species immediate connexæ designant factum, seu quantitatem quæ fit per multiplicationem omnium in se invicem. Sic ab denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b . Et abx denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b , & factum illud per x . Puta si a sit 2, & b sit 3, & x sit 5, tum ab erit 6 & abx 30.

Inter quantitates sese multiplicantes, nota x , vel vocabulum *æ*, ad factum designandum nominem quam inter scribitur. Sic 3×5 vel 3 in 5 denotat 15. Sed usus harum notarum præcipuus est, ubi compositæ quantitates sese multiplicant. Veluti si $y - 2b$ multiplicet $y + b$, terminos utriusque multiplicatoris lineolâ superimpositâ connectimus & scribimus $y - 2b$ in $y + b$, vel $y - 2b \times y + b$.

Divisio proprie est quæ fit per numeros integros querendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda quoties unitas sit minor Divisore. Sed ob analogiam vox etiam usurpatur solet cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam queritur quam habet unitas ad divisorem; sive divisor ille sit fractus aut surdus numerus aut alia cujuscunque generis quantitas. Sic
ad

ad dividendum lineam AE per lineam AC, existente AB unitate; agenda est ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imò & Divisio propter similitudinem quandam dicitur cum rectangulum ad datam lineam tanquam Basem applicatur ut inde noscatur altitudo.



Quantitas infra quantitatem cum lineola interjecta denotat quotum, seu quantitatem qua oritur lex divisione superioris quantitatis per inferiorem. Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc est 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc est octavam partem numeri 5:

& $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b ; puta si a sit 15 & b 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5.

Et sic $\frac{ab - bb}{a + x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab - bb$ per $a + x$. Atque ita in aliis. Hujusmodi autem quantitates fractiones dicuntur, parsque superior Numerator, ac inferior Denominator.

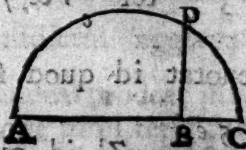
Aliquando Divisor quantitati divisa, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad designandum quantitatem quæ oritur ex divisione $\frac{axx}{a + b}$ per $a - b$, scribi potest $\frac{axx}{a + b} \div a - b$.

Ecce multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari solet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat summam utriusque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum semisse.

Si quantitas seipsam multiplicet, numerus factorum, compendii gratia, suffigi solet. Sic pro aaa scribimus a^3 , pro $aaaa$ scribimus a^4 , pro $aaaaa$ scribimus a^5 , & pro $aaabbb$ scribimus a^3b^3 vel a^3b^3 . Puta si a sit 5 & b sit 2, tum a^3 erit $5 \times 5 \times 5$ sive 125, & a^4 erit $5 \times 5 \times 5 \times 5$ sive 625, atque a^3b^3 erit $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$ sive 500. Ubi nota quod numerus inter duas species immediate scriptus, ad priorem semper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3b^3 non denotat b ter capiendum esse sed a in se bis ducendum. Nota etiam quod hæ quantitates tot dimensionum vel potestatum vel dignitatum esse dicuntur quot factoribus seu quantitativis se multiplicantibus constant, & numerus suffixus vocatur Index potestatum vel dimensionum. Sic aa est duarum dimensionum vel potestatum, & a^3 trium, ut indicat suffixus numerus 3. Dicitur etiam aa quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & sic porro. Et quantitas a ex cujus in se multiplicatione hæ potestates generantur dicitur earum Radix, nempe radix quadratica quadrati aa , cubica cubi a^3 , &c.

Cum autem radix per seipsam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, &c. erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, &c. Adeoque quantitatis cujuscunque radix quadratica erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & radix cubica primum è duobus mediè proportionalibus, & radix quadrato-quadratica primum è tribus, & sic præterea. Dupliè igitur affectione radices innotescunt, tum quod seipsas multiplicando producant superiores potestates, tum quod sint è mediis proportionalibus inter istas potestates & unitatem. Sic numeri

numeri 64 radicem quadraticam esse 8 & cubicam 4, vel ex eo patet quod 8×8 & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64; vel quod sit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16 & 16 ad 64. Et hinc si lineæ alicujus AB radix quadratica extrahenda est, produc eam ad C ut sit BC unitas; dein super AC describe semicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis est inter AB & unitatem BC.



Ad designandam radicem alicujus quantitatis præfigi solet nota $\sqrt{}$ si radix sit quadratica, & $\sqrt[3]{}$ si sit cubica, & $\sqrt[4]{}$ si quadrato-quadratica, &c. Sic $\sqrt{64}$ denotat 8; & $\sqrt[3]{64}$ denotat 4; & $\sqrt[4]{a}$ denotat a ; & $\sqrt[4]{ax}$ denotat radicem quadraticam ex ax ; & $\sqrt[3]{4axx}$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut si a sit 3, & x 12; tum $\sqrt{ax}$ erit $\sqrt{36}$, seu 6; & $\sqrt[3]{4axx}$ erit $\sqrt[3]{1728}$, seu 12. Et hæc radices, ubi non licet extrahere dicuntur *surde quantitates*, ut $\sqrt{ax}$; vel *surdi numeri*, ut $\sqrt{12}$.

Nonnulli pro designanda quadratica potestate usurpant q , pro cubica c , pro quadrato-quadratica qq , pro quadrato-cubica qc , &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipsius A , scribitur Aq , Ac , Aqq , &c. Et pro radice cubica ex $abb - x^3$ scribitur $\sqrt[3]{c:abb - x^3}$. Alii alias notas adhibent, sed quæ jam fere exoleverunt.

Nota = designat quantitates hinc inde æquales esse. Sic $x = b$ designat x æqualem esse b .

Nota :: significat quantitates hinc inde proportionales esse. Sic $a:b::c:d$, significat esse a ad b ut c ad d . Et $a:b:e::c:d:f$ esse a , b & e inter se ut sunt c , d & f inter se respectivè, vel esse a ad c , b ad d & e ad f in eadem ratione.

Deni-

Denique notarum quæ ex his componuntur interpretatio per Analogiam facile innotescit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipsius a^3bb , & $3\frac{a}{c}$ ter $\frac{a}{c}$, & $7\sqrt{ax}$ septies $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$

denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$, &

$\frac{8ea}{4a+9e}$ Z^1 id quod fit multiplicando Z^1 per $4a+9e$.

$\frac{8ee}{4a+9e}$, hoc est per Quotum exortum divisione

$5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9e}\sqrt{ax}$ id quod fit multipli-

cando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9e}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{9e}$ quotum exortum di-

visione $7\sqrt{ax}$ per e ; & $\frac{8a\sqrt{ex}}{2a+\sqrt{ex}}$ quotum exor-

tum divisione $8a\sqrt{ex}$ per summam quantitarum $2a+\sqrt{ex}$. Et sic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum

exortum divisione differentie $3axx-x^3$ per sum-

mam $a+x$, & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti,

& $\frac{2a+3e}{2a+3e}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multipli-

cando radicem illam per summam $2a+3e$.

Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb}$ denotat radicem summæ

quantitarum $\frac{1}{4}aa$ & $\frac{1}{4}bb$ & $\sqrt{\frac{1}{4}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb}}$ ra-

dicem summæ quantitarum $\frac{1}{4}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb}$,

& $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{4}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb}}$ radicem illam mul-

tiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et sic in aliis. Cæte-

Cæterum nota quod in hujusmodi complexis quantitativis non opus est ad significationem singularum literarum semper attendere; sed sufficit in genere tantum intelligere, e. g. quod

$\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ significat radicem aggregati

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; quodcumq; tandem prodeat illud aggregatum cum numeri vel lineæ pro literis sub-

stituuntur. Atque ita quod $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}}{a - \sqrt{ab}}$

significat quotum exortum divisione quantitatis

$\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ per quantitatem $a - \sqrt{ab}$, perinde ac si quantitates illæ simplices essent & cognitæ, etsi quænam sint impræsentiarum prorsus ignoretur, & ad singularum partium constitutionem aut significationem neutiquam attendatur. Id quod monendum esse duxi ne complexione terminum Tyrones quasi conterriti in limine hæcant.

DE ADDITIONE.

Numerorum, ubi non sunt admodum compositi, Additio per se manifesta est. Sic quod 7 & 9 seu 7 + 9 faciunt 16, & quod 11 + 15 faciunt 26 prima fronte patet. At in magis compositis opus peragitur scribendo numeros serie descendente & summas columnarum sigillatim colligendo. Quemadmodum si numeri 1357 & 172 addendi sunt, scribe alterutrum 172 infra alterum 1357 ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 subjiciantur, cæterique numeri $\begin{array}{r} 1357 \\ 172 \\ \hline \end{array}$ numeris correspondentibus, nempe deni 7 1729 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9 quem scribe infra. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus posteriorem

riorem numerum 2, scribe infra, priorem vero 1 asserva proximis numeris 1 & 3 adjiciendum: Dic itaque præterea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5, & scribe 5 infra, & manebit tantum 1 prima figura superioris numeri, quæ etiam infra scribenda est, & sic habebitur summa 1529.

Sic numeros 87899 + 13403 + 885 + 1920, quo in unam summam redigantur, scribe in serie descendente ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, 87899 milleni quartam constituent, & sic præterea. Deinde dic 5 + 3 valent 8, & 13403
8 + 9 valent 17, scribeque 7 infra, & 1 1920
adjice proximis numeris dicendo 1 + 8 885
valent 9, 9 + 2 valent 11, ac 11 + 9 104107
valent 20: Subscriptoque 0, dic iterum ut ante
2 + 8 valent 10, 10 + 9 valent 19, 19 + 4 valent
23, & 23 + 8 valent 31, adeoque asservato 3 sub-
scribe 1 ut ante & iterum dic 3 + 1 valent 4, 4 + 3
valent 7, & 7 + 7 valent 14. Quare subscribe 4,
denuoque dic 1 + 1 valent 2, & 2 + 8 valent 10,
quem ultimò subscribe, & omnium summam habe-
bis 104107.

Ad eundem modum numeri decima-
les adduntur ut in annexo paradi-
gmate videre est.

630'953
51'0807
305'27
987'3037

In terminis Algebraicis Additio fit connectendo quantitates addendas cum signis propriis, & insuper uniendo quæ possunt uniri. Sic a & b faciunt $a + b$; a & $-b$ faciunt $a - b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a - b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a + 9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ vel $b\sqrt{ac} - a\sqrt{ac}$, nam perinde est quo ordine scribantur.

Quantitates affirmativæ quæ ex parte Specierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos quibus

ADDITIO.

13

quibus species multiplicantur. Sic $7a + 9a$ faciunt $16a$. Et $11bc + 15bc$ faciunt $26bc$. Item

$3 \frac{a}{c} + 5 \frac{a}{c}$ faciunt $8 \frac{a}{c}$, & $2 \sqrt{ac} + 7 \sqrt{ac}$

faciunt $9 \sqrt{ac}$, & $6 \sqrt{ab - xx} + 7 \sqrt{ab - xx}$ fa-

ciunt $13 \sqrt{ab - xx}$. Et ad eundem modum

$6 \sqrt{3} + 7 \sqrt{3}$ faciunt $13 \sqrt{3}$. Quin etiam $a \sqrt{ac} + b \sqrt{ac}$

faciunt $a + b \sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam si essent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et sic

$2a + 3c \sqrt{\frac{3axx - x^3}{a+x}} + 3a \sqrt{\frac{3axx - x^3}{a+x}}$ faciunt

$5a + 3c \sqrt{\frac{3axx - x^3}{a+x}}$ eo quod $2a + 3c$ & $3a$ fa-

ciunt $5a + 3c$

Fractiones affirmativæ quarum idem est denomina-
tor, ununtur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

faciunt $\frac{3}{3}$, & $\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{b}$ faciunt $\frac{5ax}{b}$ & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$

+ $\frac{17a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ faciunt $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ & $\frac{aa}{c} + \frac{bx}{c}$ fa-

ciunt $\frac{aa + bx}{c}$

Negative quantitates eodem modo adduntur ac

affirmativæ. Sic -2 & -3 faciunt -5 ; $-\frac{4ax}{b}$

& $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a \sqrt{ax}$ &

$-b \sqrt{ax}$ faciunt $-a - b \sqrt{ax}$. Ubi verò *negativa*

quantitas affirmativa adjicienda est, oportet affirmati-

vam negativam diminueret. Sic 3 & -2 faciunt 1 ;

$\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a \sqrt{ac}$ & $b \sqrt{ac}$

faciunt

faciunt $b - a \text{ Vac.}$ Et nota quod ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum. Sic $2 \& - 3$ faciunt $- 1$; $-\frac{11ax}{b}$

$\& \frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$, ac $2 \text{ Vac} \& - 7 \text{ Vac}$ faciunt $- 5 \text{ Vac.}$

In additione aut plurium aut magis compositarum quantitarum, convenit observare formam operationis supra in additione numerorum expositam. Quemadmodum si $17ax - 14a + 3$, $\& 4a + 2 - 8ax \& 7a - 9ax$ addendæ sunt, dispono eas in serie descendente ita scilicet ut termini maxime affines stent in iisdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in una columna, species $- 14a \& 4a \& 7a$ in alia columna, atque species $17ax \& - 8ax \& - 9ax$ in tertia. Dein terminos ejusque columnæ singulatim addo dicendo 2 & 3 faciunt 5 quod subscribo, dein $7a \& 4a$ faciunt $11a$ & insuper $- 14a$ facit $- 3a$ quod iterum subscribo, denique $- 9ax \& - 8ax$ faciunt $- 17ax$ & insuper $17ax$ facit 0. Adeoque prodit summa $- 3a + 5$.

Eadem methodo res in sequentibus exemplis absolvitur.

$$\begin{array}{r} 12x + 7a \\ 11bc + 7 \text{ Vac} \\ - \frac{4ax}{b} + 6\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7x + 9a \\ 15bc + 2 \text{ Vac} \\ + \frac{11ax}{b} - 7\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19x + 16a \\ 26bc - 5 \text{ Vac} \\ \frac{7ax}{b} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{array}$$

$$- 6xx$$

$$\begin{array}{r}
 6xx + \frac{3}{7}x \\
 5x^3 + \frac{5}{7}x \\
 5x^3 - 6xx + \frac{5}{7}x \\
 y^3 + 2ayy - \frac{1}{2}aay \\
 y^3 * - 3\frac{1}{2}aay + 3a^3 - \frac{a^4}{2y} \\
 5x^4 + 2ax^3 \\
 - 3x^4 - 2ax^3 + 8\frac{1}{2}a^3 \sqrt{aa + xx} \\
 - 2x^4 + 5bx^3 - 20a^3 \sqrt{aa - xx} \\
 - 4bx^3 - 7\frac{1}{2}a^3 \sqrt{aa + xx} \\
 * + bx^3 + a^3 \sqrt{aa + xx} \\
 - 20a^3 \sqrt{aa - xx}
 \end{array}$$

DE SUBDUCTIONE.

Numerorum non nimis compositorum inventio etiam Differentiarum per se patet. Quemadmodum quod 9 de 17 relinquat 8. At in magis compositis Subductio fieri solet subscribendo numerum ablativum & sigillatim auferendo figuras inferiores de superioribus. Sic ad auferendum 63543 de 782579, subscripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod scribe infra: Dein 4 de 7 relinquit 3 quod pariter scribe infra: Tum 5 de 5 relinquit 0 quod itidem subscribe: Postea 3 de 2 auferendum est, sed cum 3 sit majus, figura 1 à proxima figura 8 mutuò sumi debet, quæ una cum 2 faciat 12, à quo auferri potest 3, & restat 9, quod insuper subscribe: Adhæc cum præter 6 etiam 1 de 8 auferendum sit, adde 1 ad 6, & summa 7 de 8 relinquet 1 quod etiam subscribe. Denique cum in inferiori numero nihil restet auferendum de superiori 7, subscribe etiam 7, & sic tandem habes differentiam 719036.

Ceterum omnino cavendum est ut figura numeri ablativi

trui subscribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, &c. Sicut in Additione dictum est. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non dispones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix} 547 \\ 0'63 \end{smallmatrix}$; sed sic $\begin{smallmatrix} 547 \\ 0'63 \end{smallmatrix}$; ita nempe ut circulus qui locum unitatum in decimali occupat, subjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis superioris numeri subintellectis, dic 3 de 0 auferendum esse, sed cum nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuo sumi ut 0 evadat 10 à quo 3 auferri potest & dabit 7, quod infra scribe. Dein illud 1 547 quod mutuo sumitur, adjectum 6 facit 7, 0'63 & hoc de superiore 0 auferendum est; sed 346'37 cum nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori sumi ut 0 evadat 10, & 7 de 10 relinquet 3, quod similiter infra scribendum est. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6, quod itidem subscribe. Denique figuras etiam 54, siquidem de illis nihil amplius auferendum restat, subscribe, & habebis residuum 546'37.

Exercitationis gratia plura tum in integris tum in decimalibus numeris exempla subjecimus.

$$\begin{array}{r} 1673 \quad 1673 \quad 458074 \quad 3572 \quad 465003 \quad 3087 \\ 1541 \quad 1580 \quad 9205 \quad 1432 \quad 33078 \quad 2574 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \quad 93 \quad 448869 \quad 214 \quad 434223 \quad 28196 \\ \hline \end{array}$$

Si quando major numerus de minori auferendus est, oportet minorem de majore auferre, & residuo præfigere negativum signum. Veluti si auferendum sit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & residuo 132 præfigo signum —.

In terminis Algebraicis Subductio fit connectendo quantitates cum signis omnibus quantitates subducendæ mutatis, & insuper uniendo quæ possunt uniri, perinde ut in Additione factum est. Sic + 7a de + 9a relin-

relinquit $+9a - 7a$ five $2a$; $-7a$ de $+9a$
 relinquit $+9a + 7a$ five $16a$; $+7a$ de $-9a$
 relinquit $-9a - 7a$ five $-16a$; & $-7a$ de
 $-9a$ relinquit $-9a + 7a$ five $-2a$. Sic $3 \frac{a}{c}$

de $5 \frac{a}{c}$ relinquit $2 \frac{a}{c}$; $7 \sqrt{ac}$ de $2 \sqrt{ac}$ relinquit
 $-5 \sqrt{ac}$; $\frac{2}{5}$ de $\frac{2}{5}$ relinquit $\frac{2}{5}$; $-\frac{7}{7}$ de $\frac{7}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$;
 $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ de
 $-\frac{17a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ relinquit $-\frac{25a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ re-
 linquit $\frac{bx - aa}{c}$; $a - b$ de $2a + b$ relinquit
 $2a + b - a + b$ five $a + 2b$; $3az - zz + ac$ de
 $3az$ relinquit $3az - 3az + zz - ac$ five $zz - ac$;
 $\frac{2aa - ab}{c}$ de $\frac{aa + ab}{c}$ relinquit $\frac{aa + ab - 2aa + ab}{c}$
 five $\frac{-aa + 2ab}{c}$: Et $a - x \sqrt{ax}$ de $a + x \sqrt{ax}$
 relinquit $a + x - a + x \sqrt{ax}$ five $2x \sqrt{ax}$. Et sic
 in aliis.

Ceterum ubi quantitates pluribus terminis con-
 stant, operatio perinde ac in numeris institui po-
 test. Id quod in sequentibus exemplis videre est.

$12x + 7a$	$15bc + 2\sqrt{ac}$	$5x^3 + \frac{5}{7}x$
$7x + 9a$	$-11bc + 7\sqrt{ac}$	$6xx - \frac{3}{7}x$
$5x - 2a$	$26bc - 5\sqrt{ac}$	$5x^3 - 6xx + \frac{8}{7}x$
$\frac{11ax}{b} - 7\sqrt{3} + \frac{7}{5}$		
$\frac{4ax}{b} - 6\sqrt{3} - \frac{7}{5}$		
$\frac{7ax}{b} - \sqrt{3} + \frac{1}{5}$		

De MULTIPLICATIONE.

Numeri qui ex Multiplicatione duorum quorūvis numerorum non majorum quā 9 oriuntur, memoriter addiscendi sunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35, quodque 8 in 9 facit 72, &c. Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam instituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet subscribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus posteriorem figuram 0 scribe infra 4, priorem vero 2 reserva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2 & fit 38, cujus posteriorem figuram 8 ut ante subscribe, & priorem 3 reserva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter subscripto habebitur 3180 numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

Porro si 9043 multiplicandus est per 2305, scribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut ante, & multiplica superiorem 9043 primò per 5, pro more ostenso, & emerget 45215, dein per 0 & emerget 0000, tertio per 3 & emerget 27129, denique per 2 & emerget 18086. Hosque sic emergentes números in serie descendente ita scribe, ut cujusque inferioris ultima figura sit uno loco prior sinistra quā ultima superioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerus qui fit multiplicando totum 9043 per totum 2305.

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
65,16	25090	78050
1448	35126	117075
2099,6	10036	39025
	137,9950	0,05151300

Sed nota quod in prodeunte numero tot semper figura ad dextram pro decimalibus abscindi debent quot sunt figurae decimales in utroque numero multiplicante. Et si forte non sint tot figurae in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi sunt, ut hic fit in exemplo tertio.

Simples termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & Species in Species ac statuendo factum Affirmativum si ambo factores sint affirmativi aut ambo negativi, & Negativum si sitis.

Sic $2a$ in $3b$ vel $-2a$ in $-3b$ facit $6ab$; vel $6ba$: Nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$ vel $-2a$ in $3b$ facit $-6ab$. Et sic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$ sive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acxy^4$; & $-4z$ in $-3Vaz$ facit $12zVaz$. Atque ita 3 in -4 facit -12 & -3 in -4 facit 12 .

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores.

Sic $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$ facit $\frac{2}{4}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ seu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$ facit $\frac{-21acyy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3Vaz}{c}$

B 3

facit

facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$ & $\frac{a}{b} \times$ in $\frac{c}{d} \times \times$ facit $\frac{ac}{bd} x^3$. Item
 3 in $\frac{2}{3}$ facit $\frac{2}{3}$ ut pateat si 3 reducatur ad formam
 fractionis $\frac{2}{3}$ adhibendo unitatem pro Denominatore.

Et sic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter

nota quod $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$

& $\frac{a}{c}bx$ nec non $\frac{a+b\sqrt{cx}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & sic
 in aliis.

Quantitates radicales ejusdem denominationis (hoc est,
 si sint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ,
 aut ambæ quadrato-quadraticæ, &c.) multiplican-
 tur ducendo terminos in se invicem sub eodem sig-
 no radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$, & $\sqrt{ab}$ in
 $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt[3]{5ayy}$ in $\sqrt[3]{7ayz}$ facit
 $\sqrt[3]{35aay^2z}$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ hoc

* Vide Cap. De Notatione. est $\frac{a^4b}{cc}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$

facit $6ab\sqrt{aaz}$ hoc est $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in
 $\frac{2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{6x^3}{\sqrt{aacc}}$ hoc est $\frac{6x^3}{ac}$. Et $\frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$
 in $\frac{3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$

Quantitates pluribus partibus constantes multiplican-
 tur ducendo singulas unius partes in singulas alte-
 rius, perinde ut in Multiplicatione numerorum
 ostensum est. Sic $c-x$ in a facit $ac-ax$, &
 $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab$
 $-3bac+bcc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$
 facit $-aab-2acb+bbc$, & in a facit a^3+
 $2aac-$

MULTIPLICATIO. 21

$2aac - abc$, quorum summa est $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$. Hujus multiplicationis specimen una cum alijs consimilibus exemplis subiectum habes,

$$\begin{array}{r}
 aa + 2ac - bc \\
 \underline{a - b} \\
 -aab - 2abc + bbc \\
 a^3 + 2aac - abc \\
 \hline
 a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 a + b \\
 \underline{a + b} \\
 ab + bb \\
 aa + ab \\
 \hline
 aa + 2ab + bb
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 \underline{a - b} \\
 -ab - bb \\
 aa + ab \\
 \hline
 aa * -bb
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 yy + 2ay - \frac{1}{2}aa \\
 \underline{yy - 2ay + aa} \\
 aayy + 2a^2y - \frac{1}{2}a^4 \\
 -2ay^2 - 4aayy + a^2y \\
 \hline
 y^4 + 2ay^2 - \frac{1}{2}aayy \\
 y^4 * -3\frac{1}{2}aayy + 3a^2y - \frac{1}{2}a^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^2}{c}} \\
 3a + \sqrt{\frac{abb}{c}} \\
 \hline
 \frac{2ax}{c} \sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c} \\
 \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^2}{c}} \\
 \hline
 \frac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^2}{c}} + \frac{2ax}{c} \sqrt{\frac{abb}{c}} - \frac{aab}{c}
 \end{array}$$

De DIVISIONE.

Diviso in numeris instituitur querendo quot vicibus Divisor in Dividendo continetur, totiesque auferendo, & scribendo totidem unitates in Quoto. Idque iterato si opus est, quamdiu divisor auferri potest.

Sic ad dividendum 63 per 7, quare quoties 7 continetur in 63 & emergent 9 pro quoto præcisè. Adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Insuper ad dividendum 371 per 7, præfige divisorem 7, & imprimis opus instituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Divisore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Resp. 5. Tum scripto 7) 371 (53-5 in Quoto, aufer 5×7 seu 35 de 37, & restabit 2, cui adnecte ultimam figuram Dividendi nempe 1, & fit 21 reliqua pars Dividendi, in qua proximum opus instituendum est. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Resp. 3. Quare scripto 3 in Quoto, aufer 3×7 seu 21 de 21 & restabit 0. Unde constat 53 esse numerum præcisè qui oritur ex divisione 371 per 7.

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò instituens in initialibus figuris 47 dic quoties 23 continetur in 47? Resp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto, & de 47 subduc 2×23 seu 46, restatque 1, cui subjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in subsequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Resp. 0. Quare scribe 0 in Quoto; & de 19 subduc 0×23 seu 0; & restat 19, cui subjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris 2 & 19 conjici potest animadvertendo

madvertendo quoties 2 continetur in 19? Resp. 8. Quare scribe 8 in Quoto & de 198 subduc 8×23 seu 184, restabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quod si hujusmodi fractio minus placeat, possis Divisionem in Fractionibus decimalibus ultra ad libitum profsequi, semper adnectendo circulum numero residuo. Sic residuo 14 adnecte 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 fit in 140? Resp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 subduc 6×23 seu 138, & restabit 2, cui adnecte 0 ut ante. Et sic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086, &c.

$$\begin{array}{r}
 23 \overline{) 4798} \quad (208,6086, \&c. \\
 \underline{46} \\
 19 \\
 \underline{00} \\
 198 \\
 \underline{184} \\
 140 \\
 \underline{138} \\
 20 \\
 \underline{00} \\
 200 \\
 \underline{184} \\
 160
 \end{array}$$

Ad eundem modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46, 1 dividitur, & prodit 0,07639, &c. Ubi nota quod in Quoto tot figurae decimales abscondenda sunt quot sunt in ultimo dividuo plures quam in divisore: Ut in hoc exemplo quinque, quia sex sunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Divisore 46,1.

$$\begin{array}{r}
 46,1 \overline{) 3,5218} \quad (0,07639 \\
 \underline{322,7} \\
 1948 \\
 \underline{2766} \\
 1820 \\
 \underline{1383} \\
 4370
 \end{array}$$

Exempla plura lucis gratia subjunximus.

9043) 20844115 (2305.

18086

27581

27129

45215

45215

0

72,4) 2099,6 (29

1448

6516

6516

0

50,18) 137,995 (2,75.

10036

37635

35126

25090

25090

0

0,0132) 0,051513 (3,9025

396

1191

1188

330

264

660

660

0

In terminis Algebraicis Divisio fit resolvendo quicquid per multiplicationem confatur. Sic ab divis. per a dat b pro quoto, $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc$ div. per $2ac$ dat $8bc$. $-84a^3x^2$ div. per $-12a^2xx$ dat $7axx$.

Item $\frac{6}{5}$ div. per $\frac{2}{3}$ dat $\frac{4}{5}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$.

$\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{e}{f}$ div. per $\frac{3}{4}$ dat $\frac{4e}{3f}$.

DIVISIO.

25

3 dat $\frac{2}{3}$; & vicissim $\frac{6}{7}$ div. per $\frac{2}{3}$ dat $\frac{3}{7}$ seu 3.
 $\frac{30a^2z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & vicissim divis.

per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$.

$\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$ seu a . $\sqrt[3]{35aay^3z}$ div. per $\sqrt[3]{5aay}$ dat $\sqrt[3]{7ayz}$.

$\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$

div. per $\frac{3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dat $\frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita

$a+b\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & vicissim div.

per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$

dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$ five $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$;

& vicissim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a . Cæterum in hu-

jusmodi resolutionibus omninò cavendum est ut quantitates sint ejusdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, species ad species, radicales ad radicales, numeratores Fractionum ad Numeratores ac Denominatores ad Denominatores, nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujusque generis ad quantitates homogeneas.

Quod si quantitas dividenda nequeat sic per divisorem resolvi, sufficit ubi ambæ quantitates sunt integræ subscribere Divisorem cum lineola interjecta. Sic

ad dividendum ab per c scribitur $\frac{ab}{c}$; & ad divi-

gendum $a+b\sqrt{cx}$ per a scribitur $\frac{a+b\sqrt{cx}}{a}$ vel $a+b$

$\frac{a+b}{a} \sqrt{cx}$. Et sic $\sqrt{ax-xx}$ divis. per $\sqrt{cx}$ dat
 $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$ five $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\frac{aa+ab}{a-b} \sqrt{aa-2xx}$
 divis. per $\frac{a-b}{a-b} \sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b} \sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$.
 Et 12 $\sqrt{5}$ div. per 4 $\sqrt{7}$ dat 3 $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi vero fractæ sunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Divisoris ac Denominatorem in Numeratorem, & factus prior erit Numerator, ac posterior Denominator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ scribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato scilicet a per d & b per c .

Parique ratione $\frac{3}{7}$ divis. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$ & $\frac{3a}{4c} \sqrt{ax}$
 divis. per $\frac{5a}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc} \sqrt{ax}$; divis. autem per
 $\frac{2c \sqrt{aa-xx}}{5a \sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^3x}{8cc \sqrt{aa-xx}}$. Et ad eundem
 modum $\frac{ad}{b}$ divis. per c (five per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c
 (five $\frac{c}{1}$) divis. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{7}$ div. per 5
 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c} \sqrt{cx}$ div.
 per a dat $\frac{a+b}{ac} \sqrt{cx}$. Et $\frac{a+b}{a-b} \sqrt{cx}$ div. per $\frac{a}{c}$ dat
 $\frac{ac+bc}{a} \sqrt{cx}$. Et $2 \sqrt{\frac{axx}{c}}$ divis. per $3 \sqrt{cd}$ dat
 $\frac{2}{3} \sqrt{axx}$

$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{a \times x}{c c d}}$; Div. autem per $3 \sqrt{\frac{c d}{x}}$ dat $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{a x^3}{c c d}}$.

Et $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{7}{11}}$ divis. per $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{7}}$ dat $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{49}{33}}$. Et sic in aliis.

Quantitas ex pluribus terminis composita dividitur applicando singulos ejus terminos ad Divisorem.

Sic $aa + 3ax - xx$ divisum per a dat $a + 3x - \frac{xx}{a}$.

At ubi Divisor etiam ex pluribus terminis constat, divisio perinde ac in Numeris institui debet. Sic ad dividendum $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ per $a - b$, Dic quoties a continetur in a^3 , nempe primus terminus Divisoris in primo Dividendi? Resp. aa . Quare scribe aa in Quoto & ablato $a - b$ in aa five $a^2 - aab$ de Dividendo, restabit $2aac - 3abc + bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rursus quoties a continetur in $2aac$? Resp. $2ac$. Quare scribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a - b$ in $2ac$ five $2aac - 2abc$ de praefato Residuo, restabit etiamnum $-abc + bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $-abc$? Resp. $-bc$. Et proinde scribe $-bc$ in Quoto, & ablato denuo $a - b$ in $-bc$ five $-abc + bbc$ de novissimo Residuo, restabit nihil. Quod indicat Divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $aa + 2ac - bc$.

Ceterum ut hujusmodi operationes ad formam qua in Divisione numerorum usi sumus debite reducantur, termini tum dividende quantitatis tum Divisoris juxta dimensiones litera alicujus quae ad hanc rem maxime idonea judicabitur, in ordine disponendi sunt, ita nempe ut illi primum locum occupent in quibus litera ista est plurimarum dimensionum, iique secundum in quibus dimensiones ejus ad maximas proximae sunt; Et sic deinceps usque ad terminos qui per literam istam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt. Sic in allato Exemplo si termini ordinentur juxta dimensiones

ones literæ a , formam operis exhibebit adjunctum

$$(a-b) \overline{a^3 + 2aac - 3abc + bbc} (aa + 2ac - bc)$$

$$\underline{a^3 - aab}$$

$$0 + 2aac - 3abc$$

$$\underline{2aac - 2abc}$$

$$0 - abc + bbc$$

$$\underline{-abc + bbc}$$

$$0 \quad 0$$

Diagramma: Ubi videre est quod terminus a^3 five a trium dimensionum occupat primum locum dividendæ quantitatis, terminique $\frac{2aac}{aab}$ in quibus a est duarum dimensionum secundum occupat, & sic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas sic scribi $a^3 + \frac{2c}{b}aa - 3bca + bbc$. Ubi termini secundum locum occupantes, uniuntur aggregando factores literæ juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo si termini juxta dimensiones literæ b dis-
ponerentur, opus sicut in proximo Diagrammate institui deberet, Cujus explicationem adnectere visum est.

$$(-b+a) \overline{cbb - 3acb + a^3} (-cb + 2ac + aa)$$

$$\underline{cbb - acb}$$

$$0 - 2acb + a^3$$

$$0 - aa^2 + 2aac$$

$$- 2acb + 2aac$$

$$\underline{-aa^2 + a^3}$$

$$0 \quad 0$$

Dic

DIVISIO.

29

Dic quoties $-b$ continetur in cb b ? Resp. $-cb$.

Quare scripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b + a$ in

$-cb$ seu $bbc - abc$ & restabit in secundo loco $-2ac$ b .

Residuo huic adnecte, si placet, quantitates in ul-

timo loco, nempe $a^3 + 2aac$; & diciterum quoties $-b$

continetur in $-2ac$ b ? Resp. $+2ac$ aa . Quare his in

Quoto scriptis, aufer $-b + a$ in $+2ac$ seu $-2ac$ b

$+2aac$ & restabit nihil. Unde constat divisionem

peractam esse, prodeunte Quoto $-cb + 2ac + aa$ ut ante.

Atque ita si dividere oportet $aaay^4 - aac^4 - yyct^4 + y^6 - 2y^4cc - a^6 - 2a^4cc - a^4yy$ per $yy - aa - cc$: Quantitates juxta literam y ad hunc modum

ordino, $yy - aa - cc$ $y^6 + aa$ $y^4 - a^4$ $yy - 2a^4cc$ $- a^6$ $- aac^4$

Dein Divisionem ut in subjecto Diagrammate instituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus insuper observandum est quod ubi dimensiones literarum ad quam ordinatio fit, non in eadem ubique progressionem Arithmetica sed per saltum alicubi procedunt, locis vacuis substituitur nota *

$$\begin{array}{r}
 yy - aa - cc \quad y^6 + aa \quad y^4 - a^4 \quad yy - 2a^4cc \quad - a^6 \quad - aac^4 \\
 \hline
 y^6 - aa \quad y^4 \quad (y^4 + 2aa \quad yy + a^4 \\
 - cc \quad - cc \quad - cc \quad + aacc. \\
 \hline
 + 2aa \\
 - cc \quad y^4 \\
 \hline
 + 2aa
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 2aa^2y^4 - 2a^4 \\ - cc^2y^4 - aaccyy \\ + c^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} a+b) aa^* - bb(a-b) \\ aa + ab \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + a^4 \\ + aaccyy \\ + a^4 \\ - a^6 \\ - aaccyy - 2a^4cc \\ - aac^4 \end{array} \quad \begin{array}{r} - ab \\ - ab - bb \\ - a^6 \\ - a^6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} yy - 2ay + aa) \\ y^4 * - 3\frac{1}{2}aayy + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 \\ y^4 - 2ay^3 + aayy \end{array} \quad \begin{array}{r} (yy + 2ay - \frac{1}{2}aa) \\ y^4 * - 3\frac{1}{2}aayy + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 2ay^3 - 4\frac{1}{2}aayy \\ + 2ay^3 - 4aayy + 2a^3y \\ - \frac{1}{2}aayy + a^3y \\ - \frac{1}{2}aayy + a^3y - \frac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa + ab\sqrt{2} + bb) \\ a^4 * * * + b^4 \\ aa + a^3b\sqrt{2} + aabb \\ - a^3b\sqrt{2} - aabb \\ - a^3b\sqrt{2} - aabb - ab^3\sqrt{2} \\ + aabb + ab^3\sqrt{2} \\ + aabb + ab^3\sqrt{2} + b^4 \end{array}$$

Aliqui Divisionem incipiunt ab ultimis terminis, sed eodem recidit si inverso terminorum ordine incipiat a prioribus. Sunt & aliae methodi dividendi sed facillimam & commodissimam nosse sufficit.

De EXTRACTIONE RADICUM.

CUM numeri alicujus radix quadratica extrahi debet, is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus est; Dein figura in Quoto seu Radice scribenda cujus quadratum figura vel figuris ante primum punctum aut aequale sit aut proxime minus. Et ablato illo quadrato, cetera radice figura sigillatim invenientur dividendo residuum per duplum radice eatenus extracta, & singulis vicibus auferendo à residuo illo factum à figura novissime prodeunte & decuplo predicti Divisoris figura illa aucti.

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum
 9'98'56. Dein quære numerum cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; scribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3 × 3 seu 9, restabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98 pro sequente opere. Tum neglecta ultima figura 8, dic quoties duplum 3 seu 6 continetur in priori 9? Resp. 1. Quare scripto 1 in Quoto, aufer factum 1 × 61 seu 61 de 98 restabit 37, cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo institui debet. Quare & hujus ultima figura 6 neglecta, dic quoties duplum 31 seu 62 continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici potest animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Resp. 6. Et scripto 6 in Quoto aufer factum 6 × 626 seu 3756, & restabit nihil. Unde constat opus peractum esse; prodeunte Radice 316.

Atque

Atque ita si radicem ex 22178791 extrahere oportet, imprimis facta punctatione quare numerum cujus quadratum, (siquidem id nequeat aequari) sit proxime minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & inuenies esse 4. Nam 5×5 sive 25 majore est quam 22, & 4×4 sive 16 minor. Quare 4 erit prima figura

radicis. Et hac ita 22'178791 (4709,43637&c.
que in Quoto scri- 16

pta, de 22 aufer —

quadratum 4×4 seu 617

16, residuoque 6ad- 609

junge desuper pro- —

ximas figuras 17, & 88791

habebitur 617, cu- 84681

jus divisione per —

duplum 4 elicienda 4110.00

est secunda figura 3767 36

radicis. Nempe, —

neglecta ultima fi- 3426400

gura 7, dic quoties 2825649

8 continetur in 617? —

Resp. 7. Quare scri- 60075100

be 7 in Quoto, & 56513196

de 617 aufer factum —

7 in 87 seu 609 & 356190400

restabit 8, cui ad- 282566169

junge proximas du- —

as figuras 87, & ha- 73624231

bebitur 887, cujus

divisione per duplum 47 seu 94 elicienda est tertia

figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88?

Resp. 0. Quare scribi 0 in quoto, adjungeque ulti-

mas duas figuras 91, & habebitur 88791 cujus di-

visione per duplum 470 seu 940 elicienda est ul-

tima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in

8879?

8879? Resp. 9. Quare scribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

Cæterum cum factus 9×9409 seu 84681 ablatu de 8879, relinquat 4110, id indicio est numerum 4709 non esse radicem numeri 22178791 præcise, sed ea paulo minorem existere. Et in hoc casu aliisque similibus si veram radicem magis appropinquare placeat, proseguenda est operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad residuum circulos duos in singulis operationibus. Sic residuum 4110 adnexis circulis, evadit 411000; cujus divisione per duplum 4709 seu 9418 elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein scripto 4 in Quoto, aufer 4×94184 seu 376736 de 411000 & restabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari potest, prodeunte tandem radice 4709,43637, &c.

Ubi vero radix ad medietatem aut ultra extracta est, cæteræ figuræ per divisionem solam obtineri possunt. Ut in hoc exemplo, si radicem ad usque novem figuras extrahere animus esset, postquam quinque priores 4709,4 extractæ sunt, quatuor posteriores 3637 elici possent dividendo residuum 34264 per duplum 4709,4.

Et ad hunc modum si radix ex 32976 ad usque quinque figuras extrahi debet; postquam figuræ punctis notantur, scribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1×1 seu 1 maximum est quod in 3, figura primum punctum antecedente, continetur.

Ac de 3 ablato quadrato illo 1, restabit 2. Dein huic 2 annexis proximis figuris 29.

Quære quoties duplum 1 seu 2

continetur in 22, & invenies quidem plusquam 10, sed

3 29 76 (181,59

1

229

224

576

361

362) 215 (59

sed nunquam licet divisorem vel decies fumere; imo neque novies in hoc casu quia factus 9×29 sive 261 major est quam 229 unde deberet auferri. Quare pone tantum 8. Et perinde scripto 8 in Quoto, & ablato 8×28 sive 224 restabit 5. Huic insuper annexis figuris 76, quare quoties duplum 18 seu 36 continetur in 57, & invenies 1, adeoque scribe 1 in Quoto ac de 576 ablato 1×361 seu 361 restabit 215. Denique ad ceteras figuras eliciendas divide hunc 215 per duplum 181 seu 362 & exhibunt figuram 59, quibus etiam scriptis in Quoto, habebitur Radix 181,59.

Eadem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix est 18,159. Et ex 3,2976 radix est 1,8159. Et ex 0,032976 radix est 0,18159. Et sic præterea. Sed ex 3297,6 radix est 57,4247. Et ex 32,976 radix est 5,74247. Atque ita ex 9,9856 radix est 3,16. Sed ex 0,99856 radix est 0,999279, &c. Quemadmodum è subjectis Diagrammatis constare potest.

3297,6(57,4247, &c. 0,99856(0,999279, &c.
25 81

797	1885
749	1701
4860	18460
4576	17901

1148)284(247 1998)559(279

Extractionem radicois cubicæ & aliarum omnium, regula generali comprehendam, praxi potius intellectui facili quàm expeditæ consulens, ne moram in eo quod raro usu veniet, discipulis inferam. Nimirum tertia quaque figura incipiendo ab unitate, primò punctis

punctis notanda est si radix sit cubica, aut unaquæque quinta si sit quadrato-cubica, &c. Dein figura in Quoto scribenda est cujus maxima potestas (hoc est cubica si radix sit cubica, aut quadrato-cubica si radix sit quadrato-cubica, &c.) aut æquetur figura vel figuris ante primum punctum, aut proximè minor sit. Et ablata illa potestate, figura proxima elicietur dividendo residuum proxima numeri resolvendi figura auctum, per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maxima potestatis, hoc est, per triplum Quadratum Quoti si radix sit cubica, aut per quintuplum quadrato-quadratum si radix sit quadrato-cubica, &c. Rursumque à numero resolvendo ablata maxima Quoti potestate, figura tertia invenietur dividendo residuum illud proxima numeri resolvendi figura auctum per potestatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maxima potestatis. Et sic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13'312.053 notandus est. Deinde in Quoto scribenda est illa figura 2 cujus cubus 8, siquidem æquari nequeat, proximè minor sit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo restabit 5, quod proxima numeri resolvendi figura 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 divisum, quærendo nempe quoties 3×4 seu 12 continetur in 53, dat 4 pro secunda figura Quoti. Sed cum Quoti 24 prodiret cubus 13824 major quam qui auferri posset de figuris 13312 antecedentibus secundum punctum, scribi debet tantum 3 in Quoto. Tum

C.

Quotus

13312053 (237
— aufer cub. 8

12) restat 53 (4. aut 3.

— aufer c. 12 167

1587) restat 11450 (7.

— aufer c. 133 12053

restat 0

Quotus 23 in charta aliqua seorsim per 23 multiplicatus dat quadratum 529, quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167, & hic de 13312 ablatu relinquit 1145; quod proxima resolvendi numeri figura 0 auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 divisum, quærendo nempe quoties 3×529 seu 1587 continetur in 11450, dat 7 pro tertia figura Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169 quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053, & hic de resolvendo numero ablatu relinquit nihil. Unde patet radicem quæsitam esse 237.

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 36430820, punctum ponitur ad quintam figuram, & figura 3, cujus quadrato-

cubus 243 proximè

minor est figuris 364

antecedentibus punctum istud, scribitur

in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de

364 ablato, restat 121

quod proxima resolvendi numeri figura 3 auctum

& per quinquies quadrato-quadratum Quoti divi-

sum, quærendo nempe quoties 5×81 seu 405 con-

tinetur in 1213, dat 2 pro secunda figura. Quo-

tus ille 32 in se ter ductus efficit quadrato-qua-

dratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum ef-

ficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero

resolvendo ablatu relinquit 2876388. Itaque 32

est integra pars radice, sed non justa radix, &

proinde si opus in decimalibus numeris prosequi

animus est, residuum circulo auctum dividi debet

per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quo-

ti, quærendo quoties 5×1048576 seu 5242880

continetur in 28763880, & prodibit tertia figura

sive

36430820 (32,5

243

405) 1213 (2

33554432

5242880) 28763880 (5

sive prima decimalis 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti 32,5 de numero resolvendo ac dividendo residuum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui potest quarta figura. Et sic in infinitum.

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda est, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\sqrt[4]{}$ valeat $\sqrt[2]{x^2}$. Et cum radix cubo-cubica extrahenda est, oportet extrahere radicem cubicam & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod $\sqrt[6]{}$ valeat $\sqrt[3]{x^2}$. Unde aliqui radices hasce non cubo-cubicas sed quadrato-cubicas dicere. Et idem in aliis radicibus quarum indices non sunt numeri primi observandum est.

E simplicibus quantitibus Algebraicis extractio radicum ex ipsa Notatione patet. Quemadmodum quod $\sqrt{aa}$ sit a , & quod $\sqrt{aacc}$ sit ac , & quod $\sqrt{9aacc}$ sit $3ac$, & quod $\sqrt{49a^4xx}$ sit $7a^2x$. Atque ita quod $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$ seu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$ sit $\frac{aa}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{a^4bb}{ccc}}$ sit $\frac{aab}{c}$, & quod $\sqrt{\frac{9aaxx}{25bb}}$ sit $\frac{3ax}{5b}$, & quod $\sqrt{\frac{8b^6}{27a^3}}$ sit $\frac{2bb}{3a}$. Et quod $\sqrt[3]{aabb}$ sit $\sqrt[3]{ab}$. Quinetiam quod $b\sqrt{aacc}$ seu b in $\sqrt{aacc}$ valeat b in ac sive abc . Et quod $3c\sqrt{\frac{9aaxx}{25bb}}$ valeat $3c \times \frac{3ax}{5b}$ sive $\frac{9acx}{5b}$. Et quod $\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{2+3x}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$ sive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc inquam patent siquidem propositas quantitates è radicibus in se ductis produci (ut aa ex a in a , $aacc$ ex ac in ac , $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) prima fronte constare potest. Ubi vero quantita-

tes pluribus terminis constant, opus perinde ac in
numeris absolvitur. Sic ad extrahendam radicem
quadraticam ex $aa + 2ab + bb$ imprimis radicem
primi termini aa nempe a aa

scribe in Quoto. Et ab-
lato ejus quadrato $a \times a$ 0
restabit $2ab + bb$ pro eli-
cienda reliqua parte radi-
cis. Dic itaque quoties
duplum quoti seu $2a$ con-
tinetur in primo residui
termino $2ab$? Resp. b . Adeoque scribe b in Quo-
to, & ablato facto b in $2a + b$ seu $2ab + bb$ re-
stabit nihil. Quod indicat opus peractum esse,
prodeunte radice $a + b$.

Et sic ad extrahendam radicem ex $a^3 + 6a^2b + 9aabb - 12ab^3 + 4b^4$ imprimis pone in Quo-
to radicem primi termini nempe aa , & ablato
ejus quadrato $aa \times aa$ seu a^4 restabit $6a^2b + 9aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro reliqua radice elicienda. Dic
itaque quoties $2aa$ continetur in $6a^2b$? Resp.
 $3ab$. Quare scribe $3ab$ in Quoto, & ablato facto

$3ab$ in $2aa + 3ab$ seu $6a^2b + 9aabb$ restabit
etiamnum $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro opere pro-

$a^4 + 6a^2b + 9aabb - 12ab^3 + 4b^4$ ($aa + 3a - 4b^3$)

0
 $6a^2b + 9aabb$

$-4aabb$
 $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$

0
sequendo.

sequendo. Adeoque dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa + 6ab$ continetur in $-4aabb - 12ab^2$, sive quod perinde est dic quoties duplum primi termini Quoti seu $2aa$ continetur in primo residui termino $-4aabb$? Resp. $-2bb$. Et proinde scripto $-2bb$ in Queto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa + 6ab - 2bb$ seu $4aabb - 12ab^2 + 4b^3$, restabit nihil. Unde constat radicem esse $aa + 3ab - 2bb$.

Atque ita quantitatis $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ radix est $x - \frac{1}{2}a$, & quantitatis $y^4 + 4y^3 - 8y^2 + 4y$ radix $yy + 2y - 2$, & quantitatis $16a^4 - 24aaxx + 9x^4 + 12bbxx - 16aabb + 4b^4$ radix $3xx - 4aa + 2bb$ ut e subjectis diagrammatis constare potest.

$$xx - ax + \frac{1}{4}aa \quad (x - \frac{1}{2}a)$$

$$\underline{xx}$$

$$\underline{-ax + \frac{1}{4}aa}$$

$$16a^4 - 24aaxx + 9x^4 + 12bbxx - 16aabb + 4b^4 \quad (3xx - 4aa + 2bb)$$

$$\underline{9x^4}$$

$$\begin{array}{r} + 16a^4 \\ - 24aaxx \\ + 12bbxx \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} - 16aabb \\ + 4b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 y^3 + 4y^2 * -8y + 4(y^2 + 2y - 3) \\
 \hline
 4y^2 + 4yy \\
 \hline
 0 - 4yy \\
 \hline
 -4yy - 8y + 4
 \end{array}$$

Si radicem cubicam ex $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ oportet extrahere, operatio est huiusmodi. Extrahe

$$\begin{array}{r}
 a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \quad (a + b. \\
 \hline
 a^3 \\
 \hline
 3aa) 0 + 3aab(b \\
 \hline
 a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

radicem cubicam primi termini a^3 nempe a , & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3 ; diu quoties triplum quadratum ejus seu $3aa$ continetur in proximo residui termino $3aab$? & prodit b . Quare scribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a + b$ ablato restabit nihil. Radix itaque est $a + b$.

Eodem modo radix cubica, si extrahatur ex $x^3 + 6x^2 - 40x^2 + 96x - 64$, prodit $2x + 2x - 4$. Atque ita in altioribus radicibus.

De REDUCTIONE FRACTIONUM
& RADICALIUM.

Precedentibus operationibus inservit reductio fractionum & radicalium quantitarum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

De REDUCTIONE FRACTIONUM
ad minimos terminos.

Fractiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem divisorem. Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad simpliciore

$\frac{aa}{b}$ dividendo utrumque aac & bc per c ; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad simpliciore $\frac{7}{203}$ dividendo utrumque 203 & 667 per 29 ; & $\frac{203aac}{667bc}$ reduci-

tur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita

$\frac{6aa - 9acc}{6aa + 3ac}$ evadit $\frac{2aa - 3cc}{2a + c}$ dividendo per $3a$.

Et $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ evadit $\frac{aa + bb}{a}$ dividendo per $a - b$.

Et hac Methodo termini post Multiplicationem vel Divisionem plerumque abbreviari possunt.

Quemadmodum si multiplicare oportet $\frac{2a^3}{3ac}$ per

$9acc$

$\frac{9acc}{bdd}$ vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$ prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$,

& per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujusmodi ca-

sibus prestat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem divisorem quos postea dividere oporteret. Sic in allato exemplo si dividam $2ab^3$ & $9aad$ per communem divisorem b , & $3ccd$ ac $9acc$ per communem divisorem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$ vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$ prodeunte tandem

$\frac{6aabb}{d^3}$ ut supra. Atque ita $\frac{aa}{b}$ in $\frac{c}{b}$ evadit

$\frac{aa}{b}$ in $\frac{1}{b}$ seu $\frac{aa}{b^2}$ Et $\frac{aa}{b}$ divis. per $\frac{b}{c}$ evadit $\frac{aa}{c}$

divis. per b seu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3 - ax^2}{xx}$ in $\frac{cx}{aa + ax}$

evadit $\frac{a - x}{1}$ in $\frac{c}{1}$ seu $\frac{ac}{1} - c$. Et 28 divis. per

$\frac{1}{3}$ evadit 4 divis. per $\frac{1}{3}$, seu 12.

De inventione Divisorum.

HUC spectat inventio divisorum per quos quantitas aliqua dividi possit. Si quantitas simplex est divide eam per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis. & omnes quantitates divisores primos habebis. Dein horum divisorum singulos binos, ternos, quaternos, &c. duc in se, & habebis etiam omnes divisores compositos. Ut si numeri 60 divisores omnes desiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2,

&

& quotum 15 per 3 & restabit quotus indivisibilis 5. Ergo divisores primi sunt 1, 2, 3, 5. Ex binis compositi 4, 6, 10, 15: Ex ternis 12, 20, 30, ex omnibus 60. Rursus si quantitatis 21 abb divisores omnes desiderentur, divide eam per 3, & quotum 7 abb per 7, & quotum abb per a , & quotum bb per b , & restabit quotus primus b . Ergo divisores primi sunt 1, 3, 7, a , b , b ; ex binis compositi 21 a , 3 b , 7 a , 7 b , ab , bb ; ex ternis 21 a , 21 b , 3 ab , 3 bb , 7 ab , 7 bb , abb ; ex quaternis 21 ab , 21 bb , 3 abb , 7 abb ; ex quinis 21 abb . Eodem modo ipsius 24 abb — 6 aac divisores omnes sunt 1, 2, a , bb — 3 ac , 2 a , 2 bb — 6 ac , abb — 3 aac , 2 abb — 6 aac .

Si quantitas postquam divisa est per omnes simplices divisores manet composita & suspicio est eam compositum aliquam divisorem habere, dispone eam secundum dimensiones literæ alicujus quæ in ea est, & pro litera illa substitue sigillatim tres vel plures terminos hujus progressionis Arithmetica, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, ac terminos totidem resultantibus una cum omnibus eorum divisoribus statue è regione correspondentium terminorum progressionis, positis divisorum signis tam affirmativis quam negativis. Deinde è regione etiam statue progressionem arithmeticas quæ per omnium numerorum divisores percurrunt pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progressionis 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altissimum terminum proposita quantitatis. Siqua occurrit ejusmodi progressio, iste terminus ejus qui stat è regione termini 0 progressionis primæ, divisus per differentiam terminorum, & cum signo suo annexus literæ præfata, componet quantitatem per quam divisio tentanda est.

Ut si quantitas sit $x^3 - xx - 10x + 6$ pro x substituendo sigillatim terminos progressionis 1, 0, — 1, orientur numeri — 4, 6, + 14 quos cum omnibus eorum divisoribus colloco è regione terminorum progressionis 1, 0, — 1 hoc modo. Dein

Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nulum numerum præter unitatem divisibilis est, quero

in divisoribus progressionem cujus termini differunt unitate, & a superioribus ad inferiora pergendo decreſcant perinde ac termini progressionis lateralis 1, 0, -1. Et huiusmodi progressionem unicam tantum invenio nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum +3 seligo qui stat è regione termini 0 progressionis primæ 1, 0, -1, tentoque divisionem per $x + 3$. Et res succedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

Rursus si quantitas sit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$. pro y substituo sigillatim 2, 1, 0, -1, -2 & numeros resultantés 30, 7, 20, 3, 34 cum omnibus eorum divisoribus è regione

colloco ut sequitur. Et in divisoribus hanc solam esse animadverto decreſcentem progressionem arithmeticam +10, +7, +4, +1, -2. Huius terminorum differentia 3 dividit altissimum quantitalis terminum $6y^4$. Quare terminum +4 qui stat è regione termini 0, divisum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y , tentoque divisionem per $y + 4$ vel quod perinde est per $3y + 4$, & res succedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

Atque ita si quantitas sit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140a^2 + 64a + 30$, operatio erit ut sequitur.

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+3.	+3.	+7.
1	23	1.23.	+1.	-1.	+2.
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	-1.	-5.	-5.
-1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	-3.	-9.	-11.

Tres

Tres occurrunt hic progressionēs quarum termini
 $-1, -5, -5$ divisi per differentias terminorum
 $2, 4, 6$, dant tres divisores tentandos $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{1}{2}$
 & $a - \frac{1}{2}$. Et divisio per ultimum divisorem $a - \frac{1}{2}$
 seu $6a - 5$, succedit prodeunte $4a^2 - 1a^3 + 4aa$
 $- 20a - 6$.

Si nullus occurrat hac methodo divisor, vel nul-
 lus qui dividit propositam quantitatem conclu-
 dendum erit quantitatem illam non admittere diviso-
 rem unius dimensionis. Potest tamen fortasse, si
 plurium sit quam trium dimensionum, divisorem
 admittere duarum. Et si ita, divisor ille investi-
 gabitur hac methodo. In quantitate illa pro litera
 substitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progressio-
 nis huius $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$. Divisores omnes
 numerorum resultantium figillatim adde & subduc qua-
 dratis correspondentium terminorum progressionis illius du-
 ctis in divisorem aliquem numeralem altissimi termini
 quantitatis propositæ, & summas differentiasque e regio-
 ne progressionis colloca. Dein progressionē omnes collate-
 rales nota quæ per istas summas differentiasque percur-
 runt. Sit $\dagger C$ terminus istiusmodi progressionis qui stat e
 regione termini 0 progressionis primæ, $\dagger B$ differentia quæ
 oritur subducendo $\dagger C$ de termino proxime superiori quæ
 stat e regione termini 1 progressionis primæ, A predictus
 termini altissimi divisor numeralis, & 1 litera quæ in
 quantitate proposita est, & erit $All \dagger B \dagger C$ divisor
 tentandus.

Ut si quantitas proposita sit $x^4 - x^3 - 5xx + 12x$
 $- 6$, pro x scribo successivè $3, 2, 1, 0, -1, -2$, &
 prodeuntes numeros $39, 6, 1, -6, -21, -26$, una
 cum eorum divisoribus e regione dispono, addo-
 que & subduco divisores terminis progressionis il-
 lius quadratis ductisque in divisorem numeralem
 termini x^4 qui unitas est, viz. terminis $9, 4, 1, 0, 1, 4$,
 & summas differentiasque e latere pariter dispono.
 Dein progressionē quæ in iisdem obveniunt e la-
 tere

tere etiam scribo, ut sequitur. Harum progressionum terminos 2 & -3 qui stant è regione termini o progressionis illius quæ in columna prima

3	39	1.3.13.39	9	-30.-4.6.8.10.12.22.48.	-4.	6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	-2.1.2.3.5. 6. 7.10.	-2.	3.
1	1	1.	1	0. 2.	0.	0.
0	6	1.2. 3. 6.	0	-6.-3.-2.-1.1.2.3.6.	2.-3.	
-1	21	1.3. 7.21.	1	-20.-6.-2.0.1.4. 8.22.	4.-6.	
-2	26	1.2.13.26.	4	-22.-9.2.3.5.6.17.30.	6.-9.	

est, usurpo successive pro $\dagger C$. Differentias quæ oriuntur subducendo hos terminos de terminis superioribus o & o nempe -2 & +3, usurpo respectivè pro $\dagger B$. Unitatem item pro A ; & x pro l . Et sic pro A $11 \pm B$ & C habeo divisores duos tentandos $xx + 2x - 2$ & $xx - 3x + 3$, per quorum utrumque res succedit.

Rursus si proponatur quantitas $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14$. Operatio erit ut sequitur. Primo rem tento addendo & subducendo divisores quadratis terminorum progressionis 2, 1, 0, 1 usurpato 1 pro A , sed res non succedit. Quare pro A

3	170		27	-7.	17	
2	38	1.2.19.38.	12	-26.-7.10.11.13.14.31.50.	-7.	11
1	10	1.2. 5.10.	3	-7.-2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	-7.	5
0	14	1.2. 7.14.	0	-14.-7.-2.-1. 1.2.7.14.	-7.	1
-1	10	1.2. 5.10.	3	-7.-2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	-7.	7
-2	190		12	-7.-13	-7.	13

usurpo 3, alterum nempe termini altissimi $3y^5$ divisorem numeralem, & quadratis istis multiplicatis per 2 hoc est numeris 12, 3, 0, 3 addo subducoque divisores; & progressionès in terminis resultantibus hæcè duas invenio -7, -7, -7, -7 & 11. 5. -1, -7. Expeditionis gratia neglexeram divisores extimorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progressionibus sumo proximos earum hinc inde terminos, viz. -7 & 17 superius, &

— 7, & — 13 inferius, ac tento si subducis his de numeris 27 ac 12 qui stant è regione in quarta columna differentiarum dividunt istos 170 & 190 qui stant è regione in columna secunda. Et quidem differentia inter 27 & — 7 id est 34 dividit 170 & differentia 12 & — 7 id est 19 dividit 190. Item differentia inter 27 & 17 id est 10 dividit 170 sed differentia inter 12 & — 13 id est 25 non dividit 190. Quare posteriorem progressionem rescio. Juxta priorem $\neq$ C est — 7, & $\neq$ B nihil, terminis progressionis nullam habentibus differentiam. Quare divisor tentandus $AV \neq B 1 \neq C$, erit $377 + 7$. Et divisio succedit, prodeunte $y^3 - 277 - 27 + 2$.

Si nullus inveniri potest hoc pacto divisor qui succedit, concludendum est quantitatem propositam non admittere divisorem duarum dimensionum. Posset eadem methodus extendi ad inventionem divisorum dimensionum plurium, quarrendo in predictis summis differentiisque progressionibus non arithmeticas quidem sed alias quasdam quarum terminorum differentiarum primarum, secundarum, tertiarum, &c. sunt in arithmetica progressionem: At in his Tyro non est detinendus.

Ubi in quantitate proposita duae sunt literae, & omnes ejus termini ad dimensiones aequè altas ascendunt; pro una istarum literarum pone unitatem, dein per regulas praecedentes quare divisorem, ac divisoris hujus comple deficientes dimensiones restituendo literam illam pro unitate.

Ut si quantitas sit $6y^4 - cy^3 - 21ccyy + 3c^2y + 20c^2$ ubi termini omnes sunt quatuor dimensionum; pro c pono 1, quantitas evadit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, cujus divisor ut supra est $3y + 4$, & completa deficiente dimensione posterioris termini per dimensionem c, fit $3y + 4c$ divisor quaesitus. Ita si quantitas sit $x^4 - bx^3 - 5bbxx + 12b^3x - 6b^4$; posito 1 pro b, & quantitatis resultantis $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$ invento divisore $xx +$

$xx + 2x - 2$, compleo ejus deficientes dimensiones per dimensiones b , & sic habeo divisorem quaesitum $xx + 2bx - 2bb$.

Ubi in quantitate proposita tres vel plures sunt literæ, & ejus termini omnes ad easdem dimensiones ascendunt; potest divisor per præcedentes regulas inveniri; sed expeditius hoc modo: *Quare omnes divisores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non est, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non est, pariter & omnium in quibus tertia litera quatuorq; & quinta non est si tot sunt literæ. Et sic percurrere omnes literas. Et e regione literarum colloca divisores respectivè. Dein vide si in serie aliqua divisorum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes tot vicibus reperiantur quot sunt literæ una dempta in quantitate proposita. Et partes duas literas involventes tot vicibus quot sunt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita est; partes ista omnes sub signis suis semel sumpta erunt divisor quaesitus.*

Ut si proponatur quantitas $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$ in quibus non est x divisores unius dimensionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b - 3c$ & $4b - 6c$; terminorum $12x^3 + 9cxx + 8ccx + 6c^3$ in quibus non est b , divisor unicus $4x + 3c$; ac terminorum $12x^3 - 14bxx - 12bbx$

+ $8b^3$ in quibus non est c , divisores $2x - b$ & $4x - 2b$. Hos divisores e regione literarum

x, b, c dispono ut hic vides. Cum tres sint literæ & divisorum partes singulæ non nisi singulas literas involvant, in serie divisorum debent partes illæ bis reperiri. At divisorum $4b - 6c$ & $2x - b$ partes $4b$, $6c$, $2x$, b non nisi semel occurrunt. Extra divisorem illum cujus sunt partes non reperiuntur. Quare divisores illos negligo.

Restant

Restant tantum tres divisores $2b - 3c$, $4x + 3c$ & $4x - 2b$. Hi in serie sunt per omnes literas x , b , c pergente, & eorum partes singulae $2b$, $3c$, $4x$, bis reperiuntur in ipsis ut oportuit, idque cum signis iisdem, si modo signa divisoris $2b - 3c$ mutantur, & ejus loco scribatur $-2b + 3c$. Nam signa divisoris cujuscvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b$, $3c$, $4x$ semel sub signis suis, & aggregatum $-2b + 3c + 4x$ divisor erit quem invenire oportuit. Nam si per hunc dividas quantitatem propositam prodibit $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

Rursus si quantitas sit $12x^3 - 10ax^2 - 9bx^2 - 26aax + 12abx^2 + 6bbx^2 + 24a^3xx - 8aabxx - 8abbxx - 24b^3xx - 4a^3bx + 6aabbx - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^2b + 32aab^2 - 12b^3$; divisores terminorum in quibus x non est colloco è regione x ; illos terminorum in quibus a non est, è regione a ; & illos terminorum quibus b non est, è regione b , ut hic vides. Dein illos omnes qui sunt unius

$$x \begin{array}{l} b, 2b, 4b, aa + 3bb, 2aa + 6bb, 4aa + 12bb, \\ bb - 3aa, 2bb - 6aa, 4bb - 12aa. \end{array}$$

$$a \begin{array}{l} 4xx - 3bx + 2bb, 12xx - 9bx + 6bb. \end{array}$$

$$b \begin{array}{l} x, 2x, 3x - 4a, 6x - 8a, 3xx - 4ax, 6xx - 8ax, \\ 2xx + ax - 3aa, 4xx + 2ax - 6aa. \end{array}$$

dimensionis rejiciendos esse sentio, quia simplices b , $2b$, $4b$, x , $2x$, & partes compositorum $3x - 4a$, $6x - 8a$, non nisi semel in omnibus divisoribus reperiuntur; tres autem sunt literae in quantitate proposita, & partes illae unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter divisores duarum dimensionum $aa + 3bb$, $2aa + 6bb$, $4aa + 12bb$, $bb - 3aa$ & $4bb - 12aa$ rejicio, quia partes eorum aa , $1aa$, $4aa$, bb & $4bb$ unicam tantum literam a vel b involventes non nisi semel reperiuntur. Divisoris autem $3bb - 6aa$

D

qui

qui solus restat e regione x , partes $2bb$ & $6aa$ quæ similiter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in divisore $4xx - 3bx + 2bb$ & pars $6aa$ in divisore $4xx + 2ax - 6aa$. Quin etiam hi tres divisores in serie sunt, stantes e regione trium literarum x, a, b ; & omnes eorum partes $2bb, 6aa, 4xx$ quæ unicam tantum literam involvunt bis reperiuntur in ipsis, idque sub propriis signis; partes vero $3bx, 2ax$ quæ duas literas involvunt non nisi semel occurrunt in ipsis. Quare horum trium divisorum partes omnes diversæ $2bb, 6aa, 4xx, 3bx, 2ax$ sub signis suis connexæ, divisorem desideratum $2bb - 6aa + 4xx - 3bx + 2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propositam & oritur $3x^3 - 4axx - 2aab - 6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non sunt æque alti, complenda sunt dimensiones deficientes per dimensiones literæ cujusvis assumpta, dein per præcedentes regulas invento divisore, litera assumpta delenda est. Ut si quantitas sit $12x^3 - 14bxx + 9xx - 12bbx - 6bx + 8x + 8b^3 - 12bb - 4b + 6$, assume literam quamvis c , & per dimensiones ejus comple dimensiones quantitatis propositæ ad hunc modum $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$. Dein hujus divisore $4x + 2b + 3c$, invento dele c ; & habebitur divisor desideratus $4x - 2b + 3$.

Aliquando divisores facilius quam per has regulas inveniri possunt. Ut si litera aliqua in quantitate proposita sit unius tantum dimensionis; querendus erit maximus communis divisor terminorum in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum in quibus non reperitur, nam divisor ille totam dividet. Et si nullus est ejusmodi communis divisor, nullus erit divisor totius. Exempli gratia, si proponatur quantitas $x^3 - 3ax^2 - 8aa$

$- 8a^2xx + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8aacx$
 $+ 6a^2c - 8a^3$; queratur communis divisor termino-
 rum $+ cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^2c$ in quibus c
 unius est tantum dimensionis, & terminorum reli-
 quorum $x^4 - 3ax^3 - 8a^2xx + 18a^3x - 8a^4$ ac
 divisor ille nempe $xx + 2ax - 2aa$ divider to-
 tam quantitatem.

Ceterum maximus duorum numerorum divisor commu-
 nis, si prima fronte non innotescit, invenitur perpetua ab-
 latione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam
 quaesitus erit divisor qui tandem nihil relinquit. Sic ad
 inveniendum maximum communem divisorem nu-
 merorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667, & re-
 liquum 58 ter de 203, & reliquum 29 bis de 58,
 restabitque nihil: Quod indicat 29 esse divisorem
 quaesitum.

Haud secus in speciebus communis divisor; ubi com-
 positus est, invenitur subducendo alterutram quantitatem,
 aut multiplicans ejus de altera: Si modò & quantitates
 illa & residuum juxta litera alicujus dimensiones ut Di-
 visione ostensum est, ordinentur, & qualibet vice concin-
 nentur dividendo ipsas per suos omnes divisores qui aut sim-
 plices sunt, aut singulos terminos instar simplicium divi-
 dunt. Sic ad inveniendum communem divisorem
 Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus

$$\frac{x^4 - 3ax^3 - 8a^2xx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - ax^2 - 8a^2x + 6a^3}$$
, multiplica

Denominatorem per x ut primus ejus terminus
 evadat idem cum primo termino numeratoris. De-
 in aufer, & restabit $- 2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$,
 quod concinnatum dividendo per $- 2a$ evadit
 $x^3 - 6a^2x + 4a^3$. Hoc aufer de Denominatore
 & restabit $- ax^2 - 2a^2x + 2a^3$. Quod iterum
 per $- a$ divisum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc
 autem per x multiplica, ut ejus primus terminus
 evadat idem cum primo termino novissimi ablato
 $x^4 - 3a^2xx + 4a^3$, de quo auferendum est; & re-

stabit $-2axx - 4aax + 4a^3$, quod per $-2a$ divisum fit etiam $xx + 2ax - 2aa$. Et hoc cum idem sit ac superius residuum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæsitus erit divisor per quem fractio proposita, factâ Numeratoris ac Denominatoris divisione, reduci potest ad simpliciolem, nempe ad $\frac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$.

Atque ita si habeatur fractio

$$\frac{6a^3 + 15a^2b - 4a^3cc - 10aabc}{9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3}$$

termini ejus imprimis abbreviandi sunt dividendo numeratorem per aa ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$ de $6a^3 + 15aab - 4acc - 10bcs$, restabit $\frac{15b}{+18c} \frac{aa}{aa} - \frac{10bcc}{-12c^3}$.

Quod concinnatum dividendo terminum utrumque per $5b + 6c$ perinde ac si $5b + 6c$ simplex esset quantitas, evadit $3aa - 2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$ & secunda vice restabit $-9aac + 6c^3$ quod itidem concinnatum per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa - 2cc$ ut ante. Quare $3aa - 2cc$ quæsitus est divisor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propositæ & obtinebitur $\frac{2a^2 + 5aab}{3ab - 9bc}$.

Quod si divisor communis hoc pacto non inveniatur, certum est nullum omninò existere, nisi forsan è terminis prodeat per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut si habeatur

fractio $\frac{aadd - cedd - aacc + c^4}{4aad - 4acd - 2acc + 2c^3}$, ac termini ejus juxta dimensiones literæ d disponantur ita ut

Numerator evadat $\frac{aa}{-cc} \frac{dd}{+c^4} - \frac{aac}{+c^4}$ ac Denominator

ñator $\frac{4aa}{4ac}d - \frac{2acc}{+2c^2}$. Hos imprimis oportet abbreviare dividendo utrumque Numeratoris terminum per $aa - cc$ & utrumque Denominatoris per $2a - 2c$ perinde ac si $aa - cc$ & $2a - 2c$ essent simplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget $dd - cc$, & vice Denominatoris $2ad - cc$, ex quibus sic præparatis nullus communis divisor obtineri potest. Sed è terminis $aa - cc$ & $2a - 2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati sunt, prodit ejusmodi divisor, nempe $a - c$, cujus

ope fractio ad hanc $\frac{add + cdd - acc - c^2}{4ad - 2cc}$ reduci

potest. Quod si neque termini $aa - cc$ & $2a - 2c$ communem divisorem habuissent, fractio proposita fuisset irreducibilis.

Et hæc generalis est methodus inveniendi communes divisores: Sed plerumque expeditius invenitur quarendo omnes alterutrius quantitates divisores primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando siqui alteram dividunt absque residuo. Sic ad reducendum

$\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a^2 - ab}$ ad minimos terminos, inveniendi sunt divisores quantitatibus $aa - ab$ nempe a & $a - b$. Dein tentandum est an alterute a vel $a - b$ dividet etiam $a^3 - aab + abb - b^3$ absque residuo.

De REDUCTIONE FRACTIONUM

ad communem Denominatorem.

Fractiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriusque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d , & vicissim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b , & evadent

$\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis est denominator bd .

Atque ita a & $\frac{ab}{c}$ sive $\frac{a}{c}$ & $\frac{ab}{c}$ evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$.

Ubi vero Denominatores communem habent divisorem, sufficit multiplicare alternè per Quotientes.

Sic fractiones $\frac{a^2}{bc}$ & $\frac{a^2}{bd}$ ad hæc $\frac{a^2d}{bcd}$ & $\frac{a^2c}{bcd}$ reducuntur, multiplicando alternè per Quotientes c ac d ortos divisione denominatorum per communem divisorem b .

Hæc autem reductio præcipuè usui est in Additione & Subductione fractionum, quæ si diversos habent denominatores, ad eundem reducendæ sunt

antequam uniri possunt. Sic $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ per redu-

ctionem evadit $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ sive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a + \frac{ab}{c}$

evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d-a^3c}{bcd}$ vel

$d - c$

$$\frac{a-c}{bda} \text{ Et } \frac{c^2 + x^2}{cc - xx} \text{ cc} - xx \text{ evadit } \frac{2x^4}{cc - xx}$$

Atque ita $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$ evadit $\frac{14}{21} + \frac{3}{21}$ five $\frac{14+3}{21}$
 hoc est $\frac{17}{21}$. Et $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ evadit $\frac{2}{4} - \frac{1}{4}$ five $\frac{1}{4}$.
 Et $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ evadit $\frac{2}{4} - \frac{1}{4}$ five $\frac{1}{4}$ hoc est $\frac{1}{4}$. Et
 $\frac{3}{4}$ five $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ evadit $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ five $\frac{4}{4}$. Et $\frac{3}{4}$
 evadit $\frac{3}{4}$.

Fractiones ubi plures sunt gradatim uniri de-
 bent. Sic habito $\frac{aa}{x} - a + \frac{2xx}{3a} - \frac{ax}{3a}$; ab
 $\frac{aa}{x}$ aufer a & restabit $\frac{aa - ax}{x}$, huic adde $\frac{2xx}{3a}$
 & prodibit $\frac{3a^3 - 3aax + 2x^3}{3ax}$ unde aufer de-
 que $\frac{ax}{a-x}$ & restabit $\frac{3a^4 - 6a^3x + 2a^2x^2 - 4ax^3}{3aax - 3axx}$.

Atque ita si habeatur $3\frac{4}{7} - \frac{1}{7}$, imprimis aggrega-
 tum $3\frac{4}{7}$ inveniendum est nempe $\frac{27}{7}$, dein ab hoc
 auferendum $\frac{1}{7}$ & restabit $\frac{26}{7}$.

De REDUCTIONE RADICALIUM ad minimos terminos.

Radicalis ubi totius radix extrahi nequit, plerumque
 concinnatur extrahendo radicem divisoris alicujus.

Sic $\sqrt{aabc}$ extrahendo radicem divisoris aa fit
 $a\sqrt{bs}$. Et $\sqrt{48}$ extrahendo radicem divisoris 16
 fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$ extrahendo radicem diviso-
 ris 16aa fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$

extrahendo radicem divisoris $\frac{aa - 4aEb + 4b^2}{cc}$
 fit

fit $\frac{a-2b}{c} \sqrt{ab}$. Et $\sqrt{\frac{a a o o m m}{p p z z} + \frac{4 a m}{p z z}}$ extra-
hendo radicem divisoris $\frac{a a m m}{p p z z}$ fit $\frac{a m}{p z z} \sqrt{00 + 4 m p}$.
Et $6 \sqrt{\frac{2}{3}}$ extrahendo radicem divisoris $\frac{2}{3}$ fit
 $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{2}}$, five $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{6}{2}}$ radicem que denominatoris adhuc
extrahendo, fit $\frac{1}{3} \sqrt{6}$. Et sic $a \sqrt{\frac{b}{a}}$ five $a \sqrt{\frac{a b}{a a}}$
extrahendo radicem denominatoris fit $\sqrt{a b}$. Et
 $\sqrt[3]{8 a^3 b + 16 a^4}$ extrahendo radicem cubicam divi-
soris $8 a^3$ fit $2 a \sqrt[3]{b + 2 a}$. Haud secus $\sqrt[4]{a^4 x}$ ex-
trahendo radicem quadraticam divisoris $a a$ fit $\sqrt{a x}$
in $\sqrt[4]{a x}$ vel extrahendo radicem quadrato-quadra-
ticam divisoris a^4 fit $a \sqrt[4]{x}$. Atque ita $\sqrt[5]{b a^5 x^5}$
convertitur in $a \sqrt[5]{x} : a x^5$, vel in $a x \sqrt[5]{x} : \frac{a}{x^4}$ vel in
 $\sqrt[5]{a x x x x} : a a x$.

Ceterum hæc reductio non tantum concinnan-
dis radicalibus inservit, sed & earum Additioni &
Subductioni, si modò ex parte radicali convenient
ubi ad formam simplicissimam reducuntur. Tunc
enim uniri possunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48}$
+ $\sqrt{75}$ per reductionem evadit $4 \sqrt{3} + 5 \sqrt{3}$ hoc
est $9 \sqrt{3}$. Et $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{16}{3}}$ per reductionem evadit
 $4 \sqrt{3} - \frac{4}{3} \sqrt{3}$ hoc est $\frac{8}{3} \sqrt{3}$. Et sic $\sqrt{\frac{4 a b}{c}} +$
 $\sqrt{\frac{a b - 4 a a b b + 4 a b}{c}}$ extrahendo quicquid est ra-
tionale, evadit $\frac{2 b}{c} \sqrt{a b} + \frac{a - 2 b}{c} \sqrt{a b}$ hoc est $\frac{a}{c}$
 $\sqrt{a b}$. Et $\sqrt[3]{8 a^3 b + 16 a^4} - \sqrt[3]{b^3 + 2 a b^3}$
evadit $2 a \sqrt[3]{b + 2 a} - b \sqrt[3]{b + 2 a}$ hoc est
 $(2 a - b) \sqrt[3]{b + 2 a}$. De

De REDUCTIONE RADICALIUM

ad eandem denominationem.

CUM in radicalibus diversæ denominationis instituenda est multiplicatio vel divisio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere, idque præfigendo signum radicale cujus index est minimus numerus quem earum indices dividunt absque residuo, & suffixas quantitates toties dempta una vice in se ducendo quoties index ille jam major evaserit.

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt[3]{a^3x^3}$ evadit $\sqrt[3]{a^3x^3}$ in $\sqrt[6]{a^6x^6}$ hoc est $\sqrt[6]{a^6x^6}$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt[4]{a^4}$ evadit $\sqrt[4]{a^4}$ in $\sqrt[8]{a^8}$ hoc est $\sqrt[8]{a^8}$. Et $\sqrt[3]{6}$ in $\sqrt[6]{6^2}$ evadit $\sqrt[6]{6^2}$ in $\sqrt[12]{6^4}$ hoc est $\sqrt[12]{6^4}$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{a^2bc}$ in $\sqrt[4]{a^4b^2c^2}$ hoc est $\sqrt[4]{a^4b^2c^2}$. Et $4a\sqrt[3]{3bc}$ evadit $\sqrt[12]{16a^43^4b^4c^4}$ in $\sqrt[12]{16a^43^4b^4c^4}$ hoc est $\sqrt[12]{16a^43^4b^4c^4}$. Et $2a\sqrt[3]{b+2a}$ evadit $\sqrt[12]{8a^4b^4+16a^4}$ in $\sqrt[12]{8a^4b^4+16a^4}$ hoc est $\sqrt[12]{8a^4b^4+16a^4}$. Atque ita $\frac{\sqrt{a}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{b^3}}$ five $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab}}$ fit $\frac{6abb}{\sqrt{18ab}}$ five $\sqrt{2ab}$. Et sic in aliis.

De REDUCTIONE RADICALIUM

ad simpliciores radicales per extractionem radicis.

RAdices quantitatum quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur sic extrahe.

Designet A quantitatis alicujus partem majorem, B partem minorem: Et erit

$$\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} \quad \text{quadratum}$$

majo-

majoris partis radicis; & $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$ quadratum

partis minoris, quæ quidem majori adadectenda est eam signum ipsius B.

Ut si quantitas sit $3 + \sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{AA - BB} = 1$, indeque quadratum majoris partis radicis $\frac{3+1}{2}$ id est 2, & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$ id est 1. Ergo radix est $1 + \sqrt{2}$. Rursus si ex $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A & $\sqrt{24}$ pro B erit $\sqrt{AA - BB} = \sqrt{8}$, & inde $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{8}}{2}$ & $\frac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{2}$ hoc est $3\sqrt{2}$ & $\sqrt{2}$ quadrata partium

radicis. Radix itaque est $\sqrt{18} - \sqrt{2}$. Eodem modo si de $aa + 2x\sqrt{aa - xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa , & pro B $2x\sqrt{aa - xx}$, & erit $AA - BB = a^2 - 4aaxx + 4x^2$. Cujus radix est $aa - 2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa - xx$, illud alterius xx ; adeoque radix $x + \sqrt{aa - xx}$. Rursus si habeatur $aa +$

$5ax - 2a\sqrt{ax} + 4xx$, scribendo $aa + 5ax$ pro A & $2a\sqrt{ax} + 4xx$ pro B, fiet $AA - BB = a^2 + 6a^2x + 9aaxx$ cujus radix est $aa + 3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa + 4ax$, illud minoris ax , & radix $\sqrt{aa + 4ax} - \sqrt{ax}$. Denique si habeatur $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$, ponendo $6 + \sqrt{8} = A$ & $-\sqrt{12} - \sqrt{24} = B$ fiet $AA - BB = 8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ hoc est (ut supra) $1 + \sqrt{2}$, & pars minor $\sqrt{3}$, atque adeo radix ipsa $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Cæterum ubi plures

plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radices citius inveniri dividendo factum quorumvis duarum radicalium per certam aliquam radicalem quæ producit quorum rationalem & integrum. Nam Quoti istius radix erit duplum partis radices quæ sita. Ut in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2, \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4, \frac{\sqrt{12} \times \sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6.$

dupli

Ergo partes radices sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut supra.

Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentia commensurabilium partium.

Sit quantitas $A + B$. Ejus pars major A . Index radices extrahenda c . Quare minimum numerum n , ejus potestas n^c dividitur per $A A - B B$ sine residuo,

& sit quatuor Q . Computa $\sqrt{A + B} \times \sqrt{Q}$ in numeris integris proximis. Sit illud r . Divide $A \sqrt{Q}$ per maximum divisorem rationalem. Sit quotus 1 , sitque $r + \frac{n}{r}$ in numeris integris proximis 1 . Et erit

$\frac{r + \frac{n}{r}}{1}$ radix quæ sita, si modo radix extrahi

potest.

Ut si radix cubica extrahenda sit ex $\sqrt[3]{968 + 253}$ erit $A A - B B = 343$; ejus divisores 7, 7, 7; ergo $n = 7$ & $Q = 1$. Porro $A + B \times \sqrt[3]{Q}$ seu $\sqrt[3]{968 + 25}$ extracta prioris partis radice sit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis est 4. Ergo $r = 4$. Insuper $A \sqrt[3]{Q}$ seu $\sqrt[3]{968}$ extrahendo quicquid rationale est sit $12 \sqrt[3]{2}$.

Ergo $\sqrt[3]{2}$ ejus pars radicalis est 1 , & $\frac{r + \frac{n}{r}}{25}$ seu $\frac{5}{2 \sqrt[3]{2}}$ in numeris integris proximis est 1 . Ergo $1 = 1$.

Denique

Denique si est $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ in n est 1 & $\sqrt{Q}$ seu $\sqrt{1}$ est 1. Ergo $2\sqrt{2} + 1$ est radix quæ sita si modo radix extrahi queat. Tercio itaque per multiplicationem si cubus ipsius $2\sqrt{2} + 1$ sit $\sqrt{968 + 25}$ & res succedit.

Rursus si radix cubica extrahenda sit ex $68 - \sqrt{4374}$ erit $AA - BB = 250$. Cujus divisores sunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n = 5 \times 2 = 10$ &

$Q = 4$. Et $\sqrt{A + B} \times \sqrt{Q}$ seu $\sqrt{68 + \sqrt{4374} \times 2}$ in numeris proximis integris est 7. Insuper $A \sqrt{Q}$ seu $68 \sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale est fit $136 \sqrt{1}$. Ergo $s = 1$, & $\frac{7 + \frac{1}{2}}{2}$ seu $\frac{7 + \frac{1}{2}}{2}$

in numeris integris proximis est 4. Ergo $r = 4$, $\sqrt{r} = 2$, $n = \sqrt{6}$ & $\sqrt{Q} = \sqrt{4}$ seu $\sqrt{2}$ atque adeo radix tentanda $\frac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

Iterum si radix quadrato-cubica extrahenda sit ex $29\sqrt{6} + 41\sqrt{3}$ erit $AA - BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $r = \sqrt{6}$, $\sqrt{r} = \sqrt{3}$ & $\sqrt{Q} = \sqrt{81}$ seu $\sqrt{9}$ atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{9}}$.

Cæterum in hujusmodi operationibus si quantitas fractio sit vel partes ejus communem habent divisorem; radices denominatoris & factorum seorsim extrahe. Ut si ex $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda sit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968} - 25}{2}$. Dein

extracta

extracta seorsim numeratoris ac denominatoris radice cubica oriatur $\frac{2\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$. Rursus si ex $\sqrt[3]{3993}$

+ $\sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda sit; divide partes per communem divisorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$. Unde quantitas proposita valet $\sqrt[3]{3}$ in $11 + \sqrt{125}$, cujus radix invenietur extrahendo seorsim radicem factoris utriusque $\sqrt[3]{3}$ & $11 + \sqrt{125}$.

De forma ÆQUATIONIS.

ÆQUATIONES, quæ sunt quantitatum aut sibi mutuo æqualium, aut simul nihilo æquipollentium congeries, duobus præcipue modis consideranda veniunt; vel ut ultimæ conclusiones ad quas in Problematis solvendis devenit, vel ut media quorum ope finales æquationes acquirenda sunt. Prioris generis æquatio ex unica tantum incognita quantitate cognitis involuta constatur, modo Problema sit definitum & aliquid certi querendum innuat. Sed ex posterioris generis involvunt plures quantitates incognitas quæ ideo debent inter se comparari & ita connecti ut ex omnibus una tandem emergat æquatio nova cui inest unica quam quærimus incognita quantitas admista cognitis. Quæ quantitas ut exinde facilius eliciatur, æquatio ista variis plerumque modis transformanda est, donec evadat ea simplicissima quæ potest, atque etiam similis alicui ex sequentibus earum gradibus, in quibus x designat quantitatem quæsitam ad cujus dimensiones termini, ut vides, ordinantur, & p, q, r, s alias quascunque quantitates ex quibus

quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, & per methodos explicandas investigari potest.

$$\begin{aligned} x &= p. & x - p &= 0. \\ xx &= px + q. & \text{Vel } xx - px - q &= 0. \\ x^3 &= pxx + qx + r. & x^3 - pxx - qx - r &= 0. \\ x^4 &= pxx^2 + qxx + rx + s. & x^4 - pxx^2 - qxx - rx - s &= 0. \\ & \&c. & \&c. \end{aligned}$$

Ad horum normam itaque termini æquationum secundum dimensiones incognitæ quantitatis in ordinem semper redigendi sunt, ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas est plurimarum dimensionum, instar x , xx , x^3 , x^4 , & secundum locum in quibus ea est una dimensione minor, instar p , px , pxx , px^3 , & sic præterea. Et quod signa terminorum attinet, possunt ea omnibus modis se habere: Imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deesse. Sic $x^3 - bbx + b' = 0$ vel $x^3 = bbx - b'$, est æquatio tertii gradus, $Z^3 + aZ^2 + abZ - b^3 = 0$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æstimantur ex maxima dimensione quantitatis incognitæ, nullo respectu ad quantitates cognitæ habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò simplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorem quodammodo deprimitur. Sic enim $x^3 = qxx + s$ æquatio secundi gradus censenda est, siquidem ea in duas secundi gradus æquationes resolvi potest. Nam supposito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illa perinde scripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio secundi gradus; cujus ope cum y inventa fuerit, æquatio $xx = y$ secundi etiam gradus, dabit x .

Atque

Atque hæc sunt conclusiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum resolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abstracte doceam. Æquationis autem solitarie reductionem in sequentibus regulis complectar.

De concinnanda Æquatione solitaria.

REG. I. **S**iquæ sunt quantitates quæ se mutuo destruere, vel per Additionem aut Subductionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt.

Veluti si habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$ aufer utrinque $2x$ & adde $3a$ proditque $5b = 8a + x$.

Atque ita $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis quæ fieri solet per translationem ad contrarias partes cum signo contrario. Ut si habita æquatione $3b = 8a + x$ desideretur x , aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum signo mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo si habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$, ac desideretur y , transpone $+3ay$ & $ab - bb$, eo ut ex una parte consistant termini multiplicati per y , & ex altera reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$, unde y elicietur per Reg. 5. sequentem, dividendo scilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit

omn $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = x$. Atque ita æquatio

abx

$abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$ per debitam transpositionem & ordinationem evadit

$$x^3 = \frac{aa}{-3ab} x - \frac{a^3}{+abb} \text{ vel } x^3 - \frac{aa}{+3ab} x + \frac{a^3}{-abb} = 0.$$

REG. II. Siqua compareat quantitas per quam omnes aequationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel si per eandem quantitatem omnes dividantur debent omnes per illam multiplicari.

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b & fit $15b = 24a + 3x$. Deinde per 3 & fit $5b = 8a + x$. Vel habito

$$\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c} \text{ multiplica omnes per } c \text{ & prodit } \frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx.$$

REG. III. Siqua sit fractio irreducibilis in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimensiones aequatio ordinanda est, omnes aequationis termini per istum denominatorem, aut per aliquem divisorem ejus multiplicandi sunt.

Ut si aequatio $\frac{ax}{a-x} + b = x$ secundum x ordinanda sit, multiplicentur omnes ejus termini per

$a-x$ denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$ siquidem x

inibi reperiatur, & prodit $ax + ab - bx = ax - xx$, seu $ab - bx = -xx$, & facta utriusque partis translatione $xx = bx - ab$. Atque ita si habea-

tur $\frac{a^3 - abb}{2cy - cc} = y - c$ terminique juxta y ordi-

nandi sint multiplicentur per denominatorem $2cy - cc$ vel saltem per divisorem $2y - c$ quo y

tollatur è denominatore & exurget $\frac{a^3 - abb}{c}$

$$= 2yy$$

$$= 2yy - 3cy + cc \text{ \& ordinando } \frac{a^3 - abb}{c} - cc$$

$$+ 3cy = 2yy. \text{ Ad eundem modum } \frac{aa}{x} - a = x$$

$$\text{multiplicando per } x \text{ evadit } aa - ax = xx, \text{ \& } \frac{aabb}{c} = \frac{xx}{a+b-x} \text{ multiplicando primo per } xx, \text{ de-}$$

$$\text{in per } a+b-x \text{ evadit } \frac{a^3bb + aab^3 - aabbx}{c} = x^4.$$

REG. IV. Sicui surda quantitati irreducibili litera illa involvatur ad cujus dimensiones aequatio ordinanda est, ceteri omnes termini ad contrarias partes cum signis mutatis transferendi sunt, & utraque pars aequationis in se semel multiplicanda si radix quadratica fit, vel bis si sit cubica, &c.

Sic ad ordinandum juxta x aequationem $\sqrt{aa} = ax + a = x$, transferatur a ad alteras partes, fitque

$$\sqrt{aa} - ax = x - a; \text{ \& quadratis partibus, } aa - ax = xx - 2ax + aa, \text{ seu } 0 = xx - ax \text{ hoc}$$

$$\text{est } x = a. \text{ Sic etiam } \sqrt[3]{aaax + 2axx} = x^3 - a + x = 0, \text{ transponendo } -a + x \text{ evadit}$$

$$\sqrt[3]{aaax + 2axx} - x^3 = -a + x, \text{ \& partibus cubicè multiplicatis } aaax + 2axx - x^3 = a^3 - 3aaax + 3axx - x^3, \text{ seu } xx = 4ax - aa. \text{ Et sic } y =$$

$$\sqrt{ay + yy} - a\sqrt{ay - yy} \text{ quadratis partibus evadit } yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy} \text{ \& terminis debi-}$$

$$\text{tè transpositis } ay = a\sqrt{ay - yy} \text{ seu } y = \sqrt{ay - yy}, \text{ \& partibus iterum quadratis } yy = ay - yy, \text{ \& transponendo denuo, } 2yy = ay \text{ five } 2y = a.$$

REG. V. Terminis secundum Dimensiones litera aliqujus ope praecedentium regularum dispositis, si maxima ejusdem litera dimensio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota aequatio per eandem dividi.

E

Sic

Sic $2y = a$ dividendo per 2 evadit $y = \frac{1}{2}a$. Et

$\frac{bx}{b} = a$ dividendo per $\frac{a}{b}$ evadat $x = \frac{aa}{b}$. Et

$\frac{2ac}{2ac} x^2 + \frac{a^2}{a^2} - \frac{2a^2c}{2a^2c} x - \frac{a^3cc}{a^3cc} = 0$ divi-

dendo per $2ac - cc$ evadit

$$x^2 + \frac{aac}{2ac - cc} + \frac{aac}{2ac - cc} x - \frac{a^3cc}{2ac - cc} = 0,$$

$$\text{five } x^2 + \frac{a^2 + aac}{2ac - cc} xx - aax - \frac{a^3c}{2a - c} = 0.$$

REG. VI. Aliquando reductio institui potest divi-
dendo equationem per compositam aliquam quantitatem.

Sic enim $y^2 = \frac{aa}{b} yy + 3bcy - bbb$, ad hanc

$yy = -2cy + bc$ reducitur transferendo terminos

omnes ad eandem partes hoc modo, $y^2 + \frac{2c}{b} yy$

$- 3bcy + bbb = 0$, & dividendo per $y - b$ ut in

capite de divisione ostensum est: Prodebit enim

$yy + 2cy - bc = 0$. Ast hujusmodi divisorum

inventio difficilis est & eam prius docuimus.

REG. VII. Aliquando etiam reductio per extra-

ctionem radice ex utraque equationis parte instituitur.

Quemadmodum si habeatur $xx = \frac{1}{2}aa - bb$,

extracta utrobique radice prodit $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}$.

Quod si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$ transfer

$2ax$ & exurget $xx - 2ax + aa = bb$, extractis-

que partium radicibus $x - a = +$ vel $-b$, seu

$x = a + b$. Sic etiam habito $xx = ax - bb$,

adde utrinque $-ax + \frac{1}{2}aa$ & prodit $xx - ax$

$+ \frac{1}{2}aa = \frac{1}{2}aa - bb$, & extracta utrobique radice

$x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}$ seu $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}$.

Et

Et sic universaliter: Si sit $xx = \cdot p x \cdot q$, erit

$$x = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp \cdot q}. \text{ Ubi } \frac{1}{2}p \text{ \& } q \text{ iisdem signis}$$

ac p & q in æquatione priori afficienda sunt; sed $\frac{1}{2}pp$ semper affirmative ponendum. Estque hoc exemplum Regula ad cuius similitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam simplicium redu-

ci possunt. E. g. Proposita æquatione $yy = \frac{2xx y}{a}$

+ xx , ad extrahendam radicem y confer $\frac{2xx}{a}$

cum p , & xx cum q , hoc est scribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$ &

$\frac{x^4}{aa} + xx$ pro $\frac{1}{2}pp \cdot q$, atque orietur $y = \frac{xx}{a} +$

$\sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$ vel $y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}$. Eodem

modo æquatio $yy = ay - zcy + aa - cc$ confe-

rendo $a - zc$ cum p , & $aa - cc$ cum q , dabit

$y = \frac{1}{2}a - c + \sqrt{\frac{1}{4}aa - ac}$. Quinetiam æqua-

tio quadrato-quadratica $x^4 = -aaxx + ab^2$

cujus termini impares defunt, ope hujus regulæ

evadit $xx = -\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^2}$, & extracta

iterum radice $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + ab^2}}$. Et

sic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnanda æquatione solitaria, quarum usum cum Analysta satis perspexerit, ita ut æquationem quamcunque propositam secundum quamlibet literarum in ea complexarum disponere noverit, & ejusdem literæ si ea unius sit dimensionis, aut maximæ potestatis ejus si plurium, valorem elicere: Haud difficilem sentiet comparationem plurium æquationum inter se; quam pergo jam docere.

De duabus pluribusve æquationibus in unam transformandis ut incognitæ quantitates exterminentur.

CUM in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes istæ (duæ per vices si modo sint plures duabus) sunt ita connectendæ ut una ex incognitis quantitatibus per singulas operationes tollatur, & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x = y + 5$, & $x = y + 2$, demendo æqualia ex æqualibus prodibit $x = 3$. Et sciendum est quod per quamlibet æquationem una quantitas incognita potest tolli, atque adeo cum tot sunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes possunt ad unam denique reduci in qua unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ sint unâ plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante duæ manebunt quantitates incognitæ, & si sint duabus plures quàm æquationes habentur tum in æquatione ultimò resultante manebunt tres, & sic præterea.

Possunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantum æquationes fortasse tolli. Ut si sit $ax - by = ab - az$, & $bx + by = bb + az$: Tum æqualibus ad æqualia additis prodibit $ax + bx = ab + bb$, exterminatis utrisque y & z . Sed ejusmodi casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere, vel calculum erroneum esse aut non satis artificiosum. Modus autem quo una quantitas incognita per singulas æquationes tollatur ex sequentibus patebit.

Exter-

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

CUM quantitas tollenda unius est tantum dimensionis in utraque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas querendus est, & alter valor statuendus æqualis alteri.

Sic positis $a + x = b + y$ & $2x + y = 3b$, ut exterminetur y æquatio prima dabit $a + x - b = y$, & secunda dabit $3b - 2x = y$. Est ergo $a + x - b = 3b - 2x$, five ordinando $x = \frac{4b - a}{3}$.

Atque ita $2x = y$, & $5 + x = y$ dant $2x = 5 + x$ seu $x = 5$.

Et $ax - 2by = ab$, & $xy = bb$ dant $\frac{ax - ab}{2b} (= y)$
 $= \frac{bb}{x}$; five ordinando $xx - bx - \frac{2b^3}{a} = 0$.

Item $\frac{bbx - aby}{a} = ab + xy$, & $bx + \frac{ayy}{c}$
 $= 2aa$ tollendo x dant $\frac{aby + aab}{bb - ay} (= x)$
 $= \frac{2aac - ayy}{bc}$: Et reducendo $y^3 - \frac{bb}{a} yy$
 $- \frac{2aac - bbc}{a} y + bbc = 0$.

Denique $x + y - z = 0$ & $ay = xz$ tollendo z
dant $x + y (= z) = \frac{ay}{x}$ five $xx + xy = ay$.

Hoc idem quoque perficitur subducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo residuum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo tolle $3b - 2x$ ab $a + x - b$ & manebit $a + 3x - 4b = 0$, five $x = \frac{4b - a}{3}$.

*Exterminatio quantitatis incognitæ substituendo
pro ea valorem suum.*

CUM in altera saltem æquatione, tollenda
quantitas unius tantum dimensionis existit,
valor ejus in ea querendus est; & pro se in æqua-
tionem alteram substituendus. Sic propositis
 $xyy = b^3$ & $xx + yy = by - ax$; ut exterminetur
 x , prima dabit $\frac{b^3}{yy} = x$: Quare in secundam

substituto $\frac{b^3}{yy}$ pro x , & prodit $\frac{b^6}{y^4} + yy = by - \frac{ab^3}{yy}$,
ac reducendo $y^6 - by^5 + ab^3yy + b^6 = 0$.

Propositis autem $ayy + aay = z^3$; & $yz - ay$
 $= az$, ut y tollatur, secunda dabit $y = \frac{az}{z - a}$.

Quare pro y substituo $\frac{az}{z - a}$ in primam, prodit-
que $\frac{a^3zz}{zz - 2az + aa} + \frac{a^3z}{z - a} = z^3$. Et redu-
cendo, $z^4 - 2az^3 + aaz - 2a^3z + a^4 = 0$.

Pari modo propositis $\frac{xy}{c} = z$ & $cy + zx = cc$,
ad z tollendum pro eo substituo $\frac{xy}{c}$ in æquatio-
nem secundam, & prodit $cy + \frac{xy}{c} = cc$.

Cæterum qui in hujusmodi computationibus ex-
ercitatus fuerit sæpe numero contrahiores modos
percipiet quibus incognita quantitas exterminari
possit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$ & $x = \frac{az}{x - b}$
si æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt
æqualia

æqualia $axx = abb$ five $x = b$. Sed casus ejusmodi particulares studiosis proprio Marte cum res tulerit investigandos linquo.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurimum in utraque æquatione dimensionum existit.

CUM in neutra æquatione tollenda quantitas unus tantum dimensionis existit valor maximæ potestatis ejus in utraque querendus est. Deinde si potestates istæ non sint eadem, æquatio potestatis minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem aut per ejus quadratum aut cubum, &c. ut ea evadat ejusdem potestatis cum æquatione altera. Tum valores illarum potestatum ponenda sunt æquales, & æquatio nova prodibit ubi maxima potestas five dimensio tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum sit $xx + 5x = 3yy$ & $2xy - 3xx = 4$; ut x tollatur, prima dabit $xx = 5x + 3yy$ & secunda $xx = \frac{2xy - 4}{3}$. Pono

itaque $3yy - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, & sic x ad unicam

tantum dimensionem reducitur, adeoque tolli potest per ea quæ paulo ante ostendi. Scilicet æquationem novissimam debite reducendo prodit

$9yy - 15x = 2xy - 4$, five $x = \frac{9yy + 4}{2y + 15}$. Hunc

itaq; valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propositis (velut in $xx + 5x = 3yy$) substituo,

& oritur $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$.
E 4 Quam

Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy + 60y + 225$, & prodit $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$, five $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea si fit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; ut y tollatur multiplico posteriorem æquationem per y & fit $y^3 = xxy - xyy - 3y$ totidem dimensionum quot prior. Jam ponendo valores ipsius y^3 sibi met æquales habeo $xxy + 3x = xxy - xyy - 3y$, ubi y deprimitur ad duas dimensiones. Per hanc itaque & simpliciorẽ ex æquationibus primo propositis $yy = xx - xy - 3$ quantitas y prorsus tolli potest insistendo vestigiis prioris exempli.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem absolvi possunt; idque sæpenumero contractius. Quemadmodum ex $yy = \frac{2xx}{a} + xx$ & $yy = 2xy$

$+ \frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utraque radicem y sicut in Reg. 7. ostensum est, & prodibunt

$$y = \frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}, \text{ \& } y = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}.$$

Jam hos ipsius y valores ponendo æquales habebitur

$$\frac{xx}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx} = x + \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}, \text{ \& rejiciendo æqualia } \sqrt{\frac{x^4}{aa} + xx}, \text{ restabit } \frac{xx}{a} = x, \text{ vel }$$

$$xx = ax \text{ \& } x = a.$$

Porro ut ex æquationibus $x + y + \frac{yy}{x} = 30$, &

$$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140 \text{ tollatur } x, \text{ aufer } y \text{ de parti-$$

bus

bus æquationis primæ, & restat $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$,

& partibus quadratis fit $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400$

$- 40y + yy$ tollendoque utrinque yy restat xx
 $+ yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y$. Quare cum $400 - 40y$

& 140 iisdem quantitibus æquantur, erit $400 - 40y = 140$, five $y = 6\frac{1}{2}$. Et sic opus in plerisque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterum cum quantitas exterminanda multarum dimensionum existit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maxime laboriosus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla sequentia tanquam regulas adhibita.

REG. I.

Ex $axx + bx + c = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit.

$$ab - bg - 2cf \times ab : + bb - cg \times bf : + agg + cff \times c = 0.$$

REG. II.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$$ab - bg - 2cf \times abb : + bb - cg - 2df \times bfb : + cb - dg \times agg + cff : + 3agb + bgg + dff \times df = 0.$$

REG. III.

Ex $ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$$ab - bg - 2cf \times abb : + bb - cg - 2df \times bfb : + agg + cff \times chh - dgb + egg - 2efb + 3agb + bgg + dff \times dfb : + 2abh + 3bgb - dfg + eff \times eff : - bg - 2ab \times efgg = 0.$$

REG.

REG. IV.

Et $ax^2 + bxx + cx + d = 0$, & $fx^2 + gxx + hx + k = 0$,
Exterminato x prodit

$$\begin{aligned} & ab - bg - 2cf \times adbb - acbk : + ak + bb - cg - 2df \\ & \times bdfb : - ek + bb + 2cg + 3df \times aakk : + cdb - ddg \\ & - cck + 2bdk \times agg + cff : + 3agb + bgg + dff - 3afh \\ & \times ddf : - 3ak - bb + cg + df \times bafk : + bk - 2dg \times bbfk \\ & - bbk - 3adb - cdf \times agk = 0. \end{aligned}$$

Verbi gratia, ut ex æquationibus $xx + 5x - 3yy = 0$, & $3xx - 2xy + 4 = 0$ exterminetur x : in regulam primam pro $a, b, c; f, g, h$ & k respective substituo $1, 5, -3yy; 3, -2y, \& 4$. Et signis $+$ & $-$ probe observatis oritur $4 + 10y + 18yy \times 4 : + 20 - 6y^3 \times 15 : + 4yy - 27yy \times -3yy = 0$. Sive $16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

Simili ratione ut y deleatur ex æquationibus $y^3 - xyy - 3x = 0$ & $yy + xy - xx + 3 = 0$, in regulam secundam pro $a, b, c, d; f, g, h, \& x$ substituo, $1, -x, 0, -3x; 1, x, -xx + 3, \& y$, respective, proditque $3 - xx + xx \times 9 - 6xx + x^4 : - 3x + x^3 + 6xx - 3x + x^3 : + 3xx \times xx : + 9x - 3x^3 - x^3 - 3xx - 3x = 0$. Tum delendo superflua & multiplicando, fit $27 - 18xx + 3x^4, - 9xx + x^6, + 3x^4 - 18x^4 + 12x^4 = 0$. Et ordinando $x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0$.

Hactenus de unica incognita quantitate è duabus æquationibus tollenda. Quod si plures è pluribus tollendæ sunt, opus per gradus peragetur: Ex æquationibus $ax = yz, x + y = z$ & $5x = y + 3z$,
si

si quantitas y elicienda sit, imprimis tolle alteram quantitatem x aut z , puta x substituendo pro ea valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem secundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a} + y = z$, & $\frac{yz}{a} = y + 3z$. E quibus deinde tolle z ut supra.

De modo tollendi quantitates quocunque fudas ex æquationibus.

HUIC referre licet quantitatum fudarum ex-terminationem fingendo eas literis quibuscunque æquales. Quemadmodum si sit $\sqrt{ay} - \sqrt{aa - ay} = 2a + \sqrt{3} : ayy$, scribendo t , pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa - ay}$, & x pro $\sqrt{3} : ayy$ habebuntur æquationes $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$, & $x^3 = ayy$, ex quibus tollendo gradatim t , v , & x resultabit tandem æquatio libera ab omni Asymmetria.

Quomodo Quæstio aliqua ad æquationem redigatur.

Postquam Tyro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit ut ingenii vires in quæstionibus ad æquationem redigendis tentet. Proposita autem aliqua Quæstione, Artificis ingenium in eo præsertim requiritur ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus designet. Ad quod faciendum perpendet imprimis an propositiones sive senten-

sententiae quibus enunciatur sint omnes aptae quae terminis algebraicis designari possint, haud secus quam conceptus nostri characteribus graecis vel latinis. Et si ita, (ut solet in quaestionibus quae circa numeros vel abstractas quantitates versantur,) tunc nomina quantitatum ignotis, atque etiam notis, si opus fuerit, imponat; & sensum quaestionis sermone, ut ita loquar, analytico designet. Et conditiones ejus ad algebraicos terminos sic transferat: tot dabunt aequationes, quot ei solvenda sufficiunt.

Quemadmodum si quaerantur tres numeri continue proportionales quorum summa sit 20, & quadratorum summa 140; positis x , y & z nominibus numerorum trium quaesitorum, Quaestio e latinis literis in algebraicas vertetur ut sequitur.

Quaestio Latine enunciata.

Eadem algebraice.

Quaerantur tres numeri his conditionibus,

$x, y, z?$

Ut sint continue proportionales,

$x, y :: y, z.$ sive $xz = yy$

Ut omnium summa sit 20.

$x + y + z = 20.$

Et ut quadratorum summa sit 140.

$xx + yy + zz = 140.$

Atque ita quaestio deducitur ad aequationes $xz = yy$, $x + y + z = 20$ & $xx + yy + zz = 140$, quarum ope x , y & z per regulas supra traditas investigandi sunt.

Ceterum notandum est solutiones quaestionum eo magis expeditas & artificiosas ut plurimum evadere quo pauciores incognitae quantitates sub initio ponuntur. Sic in hac quaestione posito x pro primo

primo numero & y pro secundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continue proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quaestionem ad aequationes sic reduco.

<i>Quaestio Latine enunciata.</i>	<i>Eadem Algebraice.</i>
Queruntur tres numeri continue proportionales,	$x, y, \frac{yy}{x}$
Quorum summa sit 20,	$x + y + \frac{yy}{x} = 20.$
Et quadratorum summa 140.	$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140.$

Habentur itaque aequationes $x + y + \frac{yy}{x} = 20$
& $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$ quarum reductione x & y determinandi sunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotannis adauget, demptis 100 lb quas annuatim impendit in familiam & post tres annos fit duplo ditior. Queruntur nummi.

Ad hoc autem resolvendum sciendum est quod plures latent propositiones quae omnes sic eruntur & enunciantur.

Latine.

Latine.

Algebraice.

Mercator habet num-
mos quosdamEx quibus anno primo
expendit 100 lb.Et reliquum adauget
triente.Annoque secundo ex-
pendit 100 lb.Et reliquum adauget
triente.Et sic anno tertio ex-
pendit 100 lb.Et reliquo trientem
similiter lucratus
est.Fitque duplo ditior
quam sub initio.

$$x - 100.$$

$$x - 100 + \frac{x - 100}{3} \text{ five } \frac{4x - 400}{3}$$

$$\frac{4x - 400}{3} - 100 \text{ five } \frac{4x - 700}{3}$$

$$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{3} \text{ five } \frac{16x - 2800}{3}$$

$$\frac{16x - 2800}{3} - 100 \text{ five } \frac{16x - 3700}{3}$$

$$\frac{16x - 3700}{3} + \frac{16x - 3700}{3} \text{ five } \frac{64x - 14800}{27}$$

$$\text{five } \frac{64x - 14800}{27}$$

$$\frac{64x - 14800}{27} = 2x.$$

Quaestio itaque ad aequationem $\frac{64x - 14800}{27}$

$= 2x$ redigitur; cuius reductione eruendus est x .

Nempe duc eam in 27 & fit $64x - 14800 = 54x$

subduc $54x$ & restat $10x - 14800 = 0$, seu $10x$

$= 14800$, & dividendo per 10 fit $x = 1480$.

Quare 1480 lb sunt nummi sub initio ut & lu-
crum.

Vides itaque quod ad solutiones quaestionum
quae circa numeros vel abstractas quantitatum re-
lationes solummodo versantur, nihil aliud fere re-
quiritur quam ut è sermone Latino vel alio quo-
vis in quo Problema proponitur, translatio fiat in
sermonem (si ita loquar) Algebraicum, hoc est in
Characteres qui apti sunt ut nostros de quantita-
rum relationibus conceptus designent. Nonnun-
quam vero potest accidere quod sermo quocum
status

status quæstionis exprimitur ineptus videatur qui in Algebraicum possit verti; sed paucis mutationibus adhibitis, & ad sensum potius quam verborum sonos attendendo versio reddetur facilis. Sic enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomatica: Quæ ubi obvenerint, translatio ex unis in alias non verbo tenus instituenda est sed ex sensu determinanda. Caterum ut huiusmodi problemata hac methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illustrem, & cum Artes exemplis facilius quam præceptis addiscantur, placuit sequentium problematum solutiones adungere:

PROB. I.

Data duorum numerorum summa a & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x & erit alter $a - x$ eorumque quadrata xx & $aa - 2ax + xx$: Quorum differentia $aa - 2ax$ supponitur b . Est itaque $aa - 2ax = b$, indeque per reductionem $aa - b$

$$= 2ax \text{ seu } \frac{aa - b}{2a} (= \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}) = x.$$

EXEMPL. GR. Si summa numerorum seu a sit 8, & quadratorum differentia seu b 16, erit

$$\frac{1}{2}a - \frac{b}{2a} (= 4 - 1) = 3 = x \text{ & } a - x = 5.$$

Quare numeri sunt 3 & 5.

PROB. II.

Invenire tres quantitates x , y & z quarum paris cuiusque summa datur.

Si

Si summa paris x & y fit a ; paris x & z , b ; & paris y & z , c : Pro determinandis tribus quaesitis x , y & z , tres habebuntur aequationes $x + y = a$, $x + z = b$, & $y + z = c$. Jam ut incognitarum duarum puta y & z exterminentur, aufer x utrinque in prima & secunda aequatione, & emergent $y = a - x$, & $z = b - x$, quos valores pro y & z substitue in tertia, & orietur $a - x + b - x = c$, & per reductionem $x = \frac{a + b - c}{2}$. Invento x aequationes superiores $y = a - x$ & $z = b - x$ dabunt y & z .

EXEMP. Si summa paris x & y fit 9, paris x & z 10, & paris y & z 13; tum in valoribus x , y & z scribe 9 pro a , 10 pro b , & 13 pro c ; & evadet $a + b - c = 6$, adeoq; $x (= \frac{a + b - c}{2}) = 3$, $y (= a - x) = 6$, & $z (= b - x) = 7$.

P R O B. III.

Quantitatem datam ita in partes quocunque dividere ut majores partes superent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejusmodi partes dividenda, ejusque prima atque minima pars x , & super hanc excessus secundae partis b , tertiae partis c & quartae partis d ; & erit $x + b$ secunda pars, $x + c$ tertia pars & $x + d$ quarta pars, quarum omnium aggregatum $4x + b + c + d$ aequatur toti lineae a . Aufer jam utrinque $b + c + d$ & restat $4x = a - b - c - d$ five $x = \frac{a - b - c - d}{4}$.

EXEMPL. Proponatur linea 20 pedum sic in 4 partes distribuenda ut super primam partem excessus

ARITHMETICARUM. 81

sus secunda sit 2 pedum tertia 3 ped. & quarta 7 ped. Et quatuor partes erunt x ($= \frac{a+b+c+d}{4}$)

sive $\frac{29-3+3-7}{4} = 2$, $x+1=4$, $x+2=5$, & $x+3=6$.

Eodem modo quantitas in plures partes iisdem conditionibus dividitur.

PROB. IV.

Viro cuidam summos inter mendicantes distribuere volenti, desunt octo denarii quo minus det singulis tres denarios. Dedit itaque singulis duos denarios & tres denarii supersunt. Quantus numerus mendicantium?

Esto numerus mendicantium x & deerunt 8 denarii quo minus det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x - 8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios & reliqui denarii $x - 8$ sunt tres. Hoc est $x - 8 = 3$ seu $x = 11$.

PROB. V.

Si Tabellarii duo A & B 59 milliariis distantes tempore eodem obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill. in 3 horis, ac B una hora serius iter instituit quam A: Quantus longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B?

Dic longitudinem illam x & erit $59 - x$ longitudo itineris B: Et cum A pertranseat 7 mill. in 2 hor. pertransibit spatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quod sit 7 mill. 2 hor. 1: x mill. $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cum B pertranseat 8 mill. in 3 hor. pertransi-

F

bit

bit spatium suum $59 - x$ in $\frac{177 - 3x}{8}$ horis. Jam cum horum temporum differentia sit 1 hor; ut evadant aequalia adde differentiam illam breviori tempori nempe tempori $\frac{177 - 3x}{8}$, & emerget

$$1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}. \text{ Et per reductionem } 35 = x.$$

Nam multiplicando per 8 fit $185 - 3x = \frac{16x}{7}$.

Dein multiplicando etiam per 7 fit $1295 - 21x = 16x$, seu $1295 = 37x$. Et dividendo huncque per 37, exiit $35 = x$. Sappitque 35 Milliter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generaliter. Pone duo minus velocitates, ut sit $8 - x$ & x per horas. Et sit spatium $59 - x$ & x per horas. Et sit spatium $59 - x$ & x per horas.

Datis duorum mobilium A & B eadem de se peragendum celeritatibus, una cum intervallo locorum ac temporibus a quibus incipiunt moveri: Determinare metam in qua conveniunt.

Pone mobilis A eam esse celeritatem qua spatium c pertransire possit in tempore f , & mobilis B eam esse qua spatium e pertransire possit in tempore g , & locorum intervallum esse a , ac b temporum in quibus moveri incipiunt.

C A S U S I

Deinde si ambo ad easdem plagas tendant, & A sit mobile quod sub initio motus longius distat a meta: Pone distantiam illam esse x , indeque aufer intervallum c , & restabit $x - c$ pro distantia B a meta. Et cum A pertranscat spatium c in tempore f , tempus in quo pertransibit spatium x

erit

erit $\frac{fx}{c}$ eo quod sit spatium c ad tempus f , ut

spatium x ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita cum B per-

transcat spatium d in g , tempus in quo perman-
 bit spatium $x - e$ erit $\frac{gx - ge}{d}$. Jam cum horum

temporum differentia supponatur h , ut ea evadant
 equalia adde h breviori tempori, nempe tempori

$\frac{fx}{c}$ si modo B prius incipiat moveri, & evadet

$\frac{fx}{c} + h = \frac{gx - ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{cge + cdb}{cg - df}$

vel $\frac{ge + db}{g - df} = x$. Sin A prius moveri inci-

piat adde h tempori $\frac{gx - ge}{d}$ & evadet $\frac{fx}{c} =$

$\frac{gx - ge}{d} + h$, & per reductionem $\frac{cge - cdb}{cg - df} = x$

$+ \frac{gx - ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge - cdb}{cg - df} = x$

$+ \frac{gx - ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge - cdb}{cg - df} = x$

CASUS II.

Quod si mobilia obviam eant, & x ut ante po-

natur initialis distantia mobilis A a meta, tum

$e - x$ erit initialis distantia ipsius B ab eadem meta;

& $\frac{fx}{c}$ tempus in quo A conficiet distantiam x , atque

$\frac{ge - gx}{d}$ tempus in quo B conficiet distantiam

suam $e - x$. Quorum temporum minori, ut

supra, adde differentiam h , nempe tempori $\frac{fx}{c}$ si B

F 2 prius

prius incipiat moveri, & sic habebitur $\frac{fx}{c} + b$

$= \frac{ge - gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge - cdb}{cg + df} = x$. Sin

A prius incipiat moveri, adde b temporis $\frac{ge - gx}{d}$

& evadet $\frac{fx}{c} = b + \frac{ge - gx}{d}$, & per reductionem

$\frac{cge + cdb}{cg + df} = x$

EXEMPL. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit & Luna tredecim, & ad tempus aliquod, Sol sit in principio Cancrī atque post tres dies Luna in principio Arietis: Quæritur locus conjunctionis proxime futuræ. Resp. in $10\frac{1}{2}$ gr. Cancrī. Nam cum ambo ad easdem plagas eant, & serior sit Epocha motus lunæ quæ longius distat a meta: Erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge + cdb}{cg - df}$ longitudo itineris luna-

ris, quæ si scribatur 13 pro c ; 1 pro f , d , ac g ; 90 pro e ; & 3 pro h ; evadet $\frac{13 \times 1 \times 90 + 13 \times 1 \times 3}{13 \times 1 - 1 \times 1}$,

hoc est $\frac{1209}{12}$, sive $100\frac{1}{2}$. Hos itaque gradus ad-
jice principio Arietis & prodibit $10\frac{1}{2}$ gr. Cancrī.

EXEMPL. II. Si Tabellarii duo A & B 59 mil-
liaribus distantes tempore matutino obviam eant,
quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mil-
liaria in 3 horis, & B una hora serius iter instituit
quam A: Quæritur iter quod A conficiet antequam
conveniat B. Resp. 35 mill. Nam cum obviam
eant & A primo instituat iter, erit $\frac{cge + cdb}{cg + df}$ iter qua-

situm.

ARITHMETICARUM. 85

fitum. Et hoc scribatur 7 pro c , 2 pro f , 8 pro g , 3 pro g , 59 pro e , & 1 pro b , evadet

$$\frac{7 \times 3 \times 59 + 7 \times 8 \times 1}{7 \times 3 + 8 \times 2} \text{ hoc est } \frac{1295}{37} \text{ five } 35$$

PROB. VI.

Data agentis alicujus potestate, invenire quot ejusmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producant.

Sit ea agentis potestas qua effectum c producere potest in tempore d , & erit ut tempus d ad tempus b , ita effectus c quem agens iste producere potest in tempore d , ad effectum quem potest producere in tempore b , qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde unius

agentis effectus $\frac{bc}{d}$ ad omnium effectum a , ita agens iste unicus ad omnes agentes: Adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

EXEMPLUM. Si scriba in 8 diebus 15 folia describere potest, quot ejusmodi scribae requiruntur ad describendum 405 folia in 9 diebus? Resp. app. Nam si substituantur 8 pro d , 15 pro c , 405 pro a & 9 pro b , numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405 \times 8}{9 \times 15}$ hoc est $\frac{3240}{135}$ five 24.

PROB. VII.

Datis plurium agentium viribus, tempus x determinare in quo datum effectum d conjunctim producant.

Agentium A, B, C , vires ponantur quae in temporibus e, f, g producant effectus a, b, c respective; & haec in tempore x producant effectus

Quare est $\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} = 6$ &

per reductionem $x = \frac{d \times 2 \times 3 + e \times 3 \times 4 + f \times 4 \times 6}{2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 6}$

IV. R. O. B.

EXEMPL. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere possunt, viz. A semel in tribus septimanis, B ter in octo septimanis, & C quinque in duodecim septimanis. Queritur quanto tempore simul absolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C vires quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 respective. Et queritur tempus quo absolvent effectum 1. Quare pro a, b, c; d; e, f, g scribe 1, 3, 5, 1, 3, 8, 12, & proveniet

$x = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}}$ sive $\frac{2}{5}$ sept. hoc est 6 dies $\frac{2}{5}$ horz, tempus quo simul absolvent.

P R O B. VIII.

Diffimiles dantur plurimæ rerum misturæ ita componere ut res illæ commista dantur inter se eandem acquirant.

Sit unius mixture data quantitas $dA + eB + fC$, alterius eadem quantitas $gA + hB + iC$, & eadem tertiæ $lA + mB + nC$ ubi A, B, & C denotent res mistas, & d, e, f, g, h, i, l, m, n. Proportiones earundem in misturis. Et sit $pA + qB + rC$ mistura quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y & z numeros esse per quos si tres date mixture respective multiplicentur, earum summa evadet $pA + qB + rC$.

$$\begin{aligned} & dxA + exB + fxC \\ & + gA + hB + iC \\ & + lA + mB + nC \end{aligned} = pA + qB + rC$$

Adco-

ARITHMETICARUM. 87

Adeoque collatis terminis $dx + gy + lz = p$,
 $ex + hy + mz = q$, & $fx + ky + nz = r$, & per

reductionem $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e}$

Et rursus aequationes $\frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e}$

& $\frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$

per reductionem dant $\frac{ep + dq + dmz - elz}{eg - dh}$

$(= y) = \frac{fq - er + eqz - fmz}{fh - ek}$ Quae, si abbre-

viatur scribendo e pro $ep - dq$, d pro $dm - el$,
 g pro $eg - eh$, h pro $fq - er$, k pro $en - fm$, & θ

pro $fh - ek$, evadet $\frac{a + \beta z}{\gamma - \theta z}$, & per re-

ductionem $\frac{a - \gamma z}{\gamma - \theta z} = z$. Invento z pone $\frac{a + \beta z}{\gamma - \theta z} = y$

& $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

Exemplum. Si tres sint metallorum colliquefacto-
 rum mixturae, quarum prima pondo continet ar-
 genti 3 12, aris 3 12, & stanni 3 3, secunda pondo
 continet argenti 3 1, aris 3 12, & stanni 3 3, &
 tertia pondo continet aris 3 14, stanni 3 2, &
 argenti nihil; sintque haec mixturae ita componendae
 ut pondo compositionis contineat argenti 3 4 aris
 3 9 & stanni 3 3. Pro $d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q$,
 scribo 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 respective,
 & erit $a (= ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9) = -104$,
 $\beta (= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$, & sic
 $\gamma = 143$, $\theta = 24$, $\zeta = -46$, & $\theta = 33$. Ade-

oque $z (= \frac{a - \gamma z}{\gamma - \theta z} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}) = 0$

P. 4

9 (=

$$y = \frac{a + bz}{143} = \frac{-104 + 0}{143} = \frac{-8}{11}, \text{ \& } x = \frac{p - ay}{d} = \frac{4 - \frac{-8}{11}}{11} = \frac{4 + \frac{8}{11}}{11} = \frac{\frac{44 + 8}{11}}{11} = \frac{52}{121}.$$

Quare si misceantur $\frac{52}{121}$ partes pondo mixturæ secundæ, $\frac{8}{11}$ partes pondo primæ & nihil tertiæ aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres stanni.

P R O B. IX.

Datis plurium ex iisdem rebus mixturarum pretiis, & proportionibus mistorum inter se, pretium cujusvis & mixtis determinare.

Cujusvis rerum A, B, C, mixturæ $dA + gB + lC$ pretium esto p , mixturæ $eA + hB + mC$ pretium q , & mixturæ $fA + kB + nC$ pretium r ; & rerum illarum A, B, C querantur pretia x , y & z . Ut pote pro rebus A, B, & C substituatur earum pretia x , y & z , & exurgent æquationes $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, & $fx + ky + nz = r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, eli-

$$\text{ciantur itidem } \frac{p - gy - lz}{d} = x, \frac{q - ey - mz}{e} = y, \text{ \& } \frac{r - fy - nz}{f} = z.$$

EXEMPL. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ simul 15 libris 12 solidis; Deinde consimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ simul 16 libris: Ac tertio consimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei & 100 modios avenæ simul 34 lib. Queritur quanti æstimandus sit modius cujusque grani? Resp. Modius tritici 5 solidis, hordei 3 solidis & avenæ 2 solidis. Nam pro $d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, r$ scribendo respective 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24,

ARITHMETICARUM. 85

$$\begin{aligned}
 120, 100; 15\frac{1}{2}, 16, \& 34; \text{prodit } a (=ep - dq \\
 = 26 \times 15\frac{1}{2} - 40 \times 16) = -234\frac{1}{2}; \& \beta (=dm \\
 - el = 40 \times 50 - 26 \times 20) = 1480. \text{ Atque ita} \\
 x = -576, y = -500, z = 1400, \& u = - \\
 2400. \text{ Adeoque } x (= \frac{6a - 7d}{75 - \beta\delta} = \frac{562500 - 200000}{-806400 + 3552000} \\
 = \frac{274560}{-2745600}) = \frac{1}{10}, y (= \frac{a + \beta u}{2} = \frac{-234\frac{1}{2} + 248}{2} \\
 = \frac{13\frac{1}{2}}{2}). \text{ Et } x (= \frac{p - 8y - 1z}{d} = \frac{154 - 13\frac{1}{2} - 1400}{40}) \\
 = -3.
 \end{aligned}$$

Constitit itaque modus tritici $\frac{1}{2}$ lb seu 5 solidis, modus hordei $\frac{1}{3}$ lb seu 3 solidis, & modus avenae $\frac{1}{4}$ lb seu 2 solidis.

PROB. X

Datus & mixtura & misturam gravitabilibus specificis invenire proportionem misturum inter se.

Sit a gravitas specifica mixturæ $A + B$ cujus A gravitas specifica est a , & B gravitas b ; & cum gravitas absoluta seu pondus componatur ex mole corporis & gravitate specifica, erit aA pondus ipsius A , bB pondus ipsius B & $aA + bB$ pondus aggregati $A + B$, adeoque $aA + bB = cA + cB$, indeque $aA - cA = cB - bB$ seu $c - b$. $a - c :: A : B$.

EXEMPL. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut 10, & Corona Hieronis ut 17; eritque 10. 3 ($c = 17$, $a - c :: A : B$) :: moles in auri corona, ad molem argenti, vel 190. 31 ($c :: 19 \times 10$, $10 \times 3 :: a \times c - b \times a - c$) :: pondus auri in corona, ad pondus argenti, & 221. 31 :: pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB.

PROB. XL

Si boves a depascant pratum b in tempore c ; & boves d depascant pratum aque bonum e in tempore f ; & gramen uniformiter crescat: Quæritur quos boves depascant pratum simile g in tempore h .

Si boves a in tempore c depascant pratum b tum per analogiam boves $\frac{a}{b}$ in eodem tempore c , vel

boves $\frac{a}{b}$ in tempore f , vel boves $\frac{a}{b}$ in tempore h , depascant pratum e : puta si gramen post tempus c non cresceret. Sed cum propter graminis incrementum boves d in tempore f depascant solummodo pratum e , ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f - c$ tantum erit quantum per se sufficit pascendis bobus $2 - \frac{e}{f}$ per

tempus f , hoc est quantum sufficit pascendis bobus $\frac{2}{f}$ per tempus b . Et in tempore $a - c$ per analogiam tantum erit incrementum quantum per se sufficit pascendis bobus $\frac{2}{a}$ in $\frac{a}{b}$.

Hoc incrementum adiec bobus $\frac{2}{b}$ & prodibit $\frac{2}{b} \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{f} \right)$ numerus boum quibus pascendis sufficit pratum e per tempus h . Adeoque per analogiam pratum g bobus $\frac{2}{b} \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{f} \right) \frac{g}{e}$

$$\frac{bd f g h - e c a g h - b d c g f + e c f g a}{b e f h - b c e h} \text{ per idem}$$

tempus *b* pascendis sufficiet.

EXEMPL. Si 12 boves depascant 3 $\frac{1}{2}$ jugera prati in 4 septimanis; & 21 boves depascant 10 jugera consimilis prati in 9 septimanis; queritur quot boves depascant 24 jugera in 18 septimanis? Resp. 36. Iste enim numerus invenietur substituendo in $bd f g h - e c a g h - b d c g f + e c f g a$ numeros 3 $\frac{1}{2}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis *a, b, c, d, e, f, g* & *h* respective. Sed solutio forte haud minus expedita erit si è primis principiis ad formam solutionis precedentis literalis eruat. Utpote si 12 boves in 4 septimanis depascant 3 $\frac{1}{2}$ jugera, tum per analogiam 36 boves in 4 septimanis vel 16 boves in 9 septimanis vel 8 boves in 18 septimanis depascant 10 jugera: Pata si gramen non cresceret. Sed cum propter graminis incrementum 21 boves in 9 septimanis depascant solummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per posteriores 5 septimanas incrementum tantum erit quantum per se sufficit excessui boum 21 supra 16, hoc est 5 bobus per 9 septimanas, vel quod perinde est $\frac{5}{9}$ bobus per 18 septimanas pascendis. Et in 14 septimanis (excessu 18 supra 4 primas) incrementum illud graminis per analogiam tantum erit quantum sufficiat 7 bobus per 18 septimanas pascendis; est enim 5 sept. 14 sept. $\frac{5}{9}$ boves 7 boves. Quare 8 bobus quos 10 jugera sine incremento graminis pascere possunt per 18 septimanas adde hinc 7 boves quibus pascendis solum incrementum graminis sufficit, & summa erit 15 boves. Ac denique si 10 jugera 15 bobus per 18 septimanas pascendis sufficiant, tum per analogiam 24 jugera per idem tempus sufficient 36 bobus.

PROB.

Datis sphericorum corporum in eadem recta motorum, sibiue occurrentium magnitudinibus & motibus: determinari motus eorundem post reflexionem.

Hujus resolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eadem celeritate post reflexionem recedant ab invicem qua ante accedebant. His positis sint corporum A & B celeritates a & b respectivæ; & motus (siquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt aA & bB . Et si corpora ad easdem plagas tendant, & A celerius movens insequatur B, pone x decrementum motus aA , & incrementum motus bB percussione exortum; & post reflexionem motus erunt $aA - x$ & $bB + x$; & celeritates $\frac{aA - x}{A}$ ac

$\frac{bB + x}{B}$ quarum differentia æquatur $a - b$ differentiz celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio

$$\frac{bB + x}{B} - \frac{aA - x}{A} = a - b, \text{ \& inde per}$$

$$\text{reductionem fit } x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}, \text{ quo pro}$$

$$x \text{ in celeritatibus } \frac{aA - x}{A} \text{ \& } \frac{bB + x}{B} \text{ substituto}$$

$$\text{prodeunt } \frac{aA - aB + 2bB}{A + B} \text{ celeritas ipsius A,}$$

$$\text{\& } \frac{2aA - bA + bB}{A + B} \text{ celeritas ipsius B post reflexionem.}$$

Quod

Quod si corpora obviam eant, tum signo ipsius
 b ubique mutato, celeritates post reflexionem erunt

$$aA - aB - 2bB \quad \& \quad 2aA + bA - bB$$

Quia
 $A + B = A + B$

tum alterutra si forte negativa obvenierit, id arguit
 motum illum post reflexionem ad plagam dirigi
 ei contrariam ad quam A tendebat ante reflexi-
 onem. Id quod etiam de motu ipsius A in casu
 priori intelligendum est.

EXEMPL. Si corpora homogenea A trium libra-
 rum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum
 cum celeritatis gradibus 2 ad easdem plagas tendant:
 tunc pro A , a , B & b scribe 3, 8, 9 & 2; &
 $(aA - aB + 2bB)$ evadit - 1, ac $(\frac{2aA - bA + bB}{A + B})$

5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis
 post reflexionem, & B cum quinque gradibus pro-
 gredietur.

P R O B. XIII.

Invenire tres numeros continue proportionales quorum
 summa sit 20, & quadratorum summa 140.

Pone numerorum primum x , & secundum y ; erit-
 que tertius $\frac{yy}{x}$; adeoque $x + y + \frac{yy}{x} = 20$; & xx

$$+ yy + \frac{y^4}{xx} = 140. \text{ Et per reductionem } xx^2 + yy = 0, \text{ \& } x^4 + \frac{yy}{x}xx + y^4 = 0.$$

Jam ut
 exterminetur x , pro a, b, c, d, e, f, g & h in Reg. 3.
 substitue respective 1, 0, $yy - 140$, 0, y^4 ; 1, y
 $- 20$, & yy ; Et emerget $-yy + 280xy^4$:
 $+ 2yy - 40y + 260x260y^4 - 40y^5 + 3y^6$

$3y^2 - 2yy \times y - 40y^3 + 400y^4 = 0$. Et per multiplicationem $1600y^3 - 20800y^4 - 67600y^5 = 0$.

Ac reducendo $4yy - 52y + 169 = 0$. Sive (radice extracta) $2y - 13 = 0$ seu $y = 6\frac{1}{2}$. Id quod etiam brevius alia methodo sed minus obvia supra inventum est. Porro ut inveniatur x substitue $6\frac{1}{2}$

pro y in equatione $xx - 20x + yy = 0$. Et exurget $xx - 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{2} = 0$, seu $xx = 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{2}$. Et extracta radice $x = 6\frac{1}{2} + \text{vel } -\sqrt{3\frac{1}{2}}$.

Nempe $6\frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{2}}$ est maximus quæstorum trium numerorum, & $6\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{2}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambigue designat, indeque gemini prodeunt valores, quorum

alteruter potest esse x , existente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Positis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$ ut ante,

erit $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, seu $xx = -\frac{20}{y}x - yy$ & ex-

tracta radice $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{100 - 10y - \frac{1}{2}yy}$

primus numerus: Hunc & y aufer de 20 & restat $\frac{yy}{x}$

$= 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{100 - 10y - \frac{1}{2}yy}$ tertius numerus.

Etque summa quadratorum à tribus hisce numeris

$400 - 40y$, adeoque $400 - 40y = 140$, sive $y = 6\frac{1}{2}$.

Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, substitue eum pro y in

primò ac tertio numero supra invento; & evadet primus $6\frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{2}}$ ac tertius $6\frac{1}{2} - \sqrt{3\frac{1}{2}}$ ut ante.

PROB. XIV.

Levante quatuor numeros continue proportionales quod duo mediis simul constituunt 12, & duo extremi 20.

Sit

ARITHMETICARUM.

89

Sit x secundus numerus; & erit $12 - x$ tertius;
 $\frac{144}{12 - x}$ primus; & $\frac{144 - 24x + x^2}{12 - x}$ quartus;

$$\text{deoque } \frac{xx}{12 - x} + \frac{144 - 24x + xx}{12 - x} = 20. \text{ Et}$$

per reductionem $xx = 12x - 60$ seu $x = 6$
 Quo invento ceteri numeri è superioribus
 dantur.

PROB. XV.

Duo extremi

Invenire quatuor numeros continue proportionales, quo-
 rum datur summa a , & summa quadratorum b .

Et si desideratas quantitates ut plurimum imme-
 diate querere solemus, siquando tamen dua obve-
 nerint ambigua, hoc est quæ conditionibus præsti-
 no similibus prædita sunt, (ut hic duo medii &
 duo extremi numerorum quatuor proportionalium)
 præstat alias quantitates non ambiguas querere per
 quas hæc determinantur, quemadmodum harum
 summam vel differentiam vel rectangulum. Pona-
 mus ergo summam duorum mediorum numerorum
 esse s , & rectangulum y ; & erit summa extremorum
 $a - s$, & rectangulum etiam x propter proportionali-
 tatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi nu-
 meri, pone x primum & y secundum; tertius erit
 $\frac{a - s}{2}$; & $\frac{a - s}{2} - x$ quartus; & rectangulum
 sub mediis $xy = \frac{1}{4}(a - s)^2 - x^2$, indeque mediis
 $y = \frac{1}{4}(a - s)^2 - x^2$ & $s - y = \frac{1}{2}(a - s) - \sqrt{\frac{1}{4}(a - s)^2 - x^2}$
 Item rectangulum sub extremis $ax = \frac{1}{4}(a - s)^2 - x^2$

$$\text{indeq; extremi } x = \frac{a - s}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a - s)^2 - \frac{b}{4}}$$

$$\text{et } a - s - x = \frac{a - s}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4}(a - s)^2 - \frac{b}{4}}$$

Summa

Summa quadratorum ex hisce quatuor numeris est $2s^2 + 2as + a^2 = 4s$ quae est $= 4s$. Ergo $s = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}as + \frac{1}{2}as + \frac{1}{2}b$ quo substituto pro s procedunt quatuor numeri ut sequitur.

Et $s = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}as + \frac{1}{2}as + \frac{1}{2}b$

Duo medii $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}as + \frac{1}{4}a^2} \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}as + \frac{1}{4}a^2} \end{array} \right.$

Duo extremi $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(a-s)^2 - \frac{1}{4}as} \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(a-s)^2 - \frac{1}{4}as} \end{array} \right.$

Restat tamen etiam inquirendus valor ipsius s . Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hisce substituatur.

$\left(\frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(a-s)^2 - \frac{1}{4}as} \right) + \left(\frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(a-s)^2 - \frac{1}{4}as} \right) = 2s$

Et pone rectangulum sub secundo & quarto aequale quadrato terti siquidem hac problematis conditio nonnulla impleatur, erisque $\frac{as-s^2}{4} = \frac{1}{4}qs$

$\frac{as-s^2}{4} = \frac{1}{4}qs$ $\Rightarrow as - s^2 = qs + pp$. Pone etiam

rectangulum sub primo & tertio aequale quadrato

secundi, & erit $\frac{as-s^2}{4} + \frac{1}{4}qs = \frac{pa+ps}{4} - pq$

$= \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Harum aequationum priorem super e posteriori & restabit $qs - pa + ps = 2ps$, seu $qs = pa + ps$. Restitue jam $\sqrt{\frac{1}{4}b}$

$\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ in locum p , & $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$
in locum q , & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = a + s \times$
 $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss =$
 $-\frac{b}{a}s + \frac{7}{2}aa - \frac{1}{2}b$, seu $s = -\frac{b}{2a} +$
 $\sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$, quo invento dantur quatuor
or numeri quæfiti è superioribus.

PROB. XVI

*Si pensio annua librarum a per quinque annos proxime
sequentes solvenda, ematur parata pecunia c, quantitas
quanti æstimanda sit usura usura centum librarum per
annum.*

Pone $1 - x$ usuram usuræ pecuniæ x in anno,
hoc est quod pecunia 1 post annum solvenda valeat
 x paratæ pecuniæ; & per analogiam pecunia a post
annum solvenda valebit ax paratæ pecuniæ, post
duos annos axx , post tres ax^3 , post quatuor ax^4
& post quinque ax^5 . Adde jam hos quinque ter-
minos & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + ax^2 + ax = c$,
seu $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quin-
que dimensionum, cujus ope cum x per 1 regulas
post docendas inventum fuerit, pone $x : 1 :: 100 : y$.
Et erit $y = 100$ usura usuræ centum librarum
per annum.

Atque has in quætionibus ubi solæ quantita-
tum proportionibus absque positionibus linearum con-
siderandæ veniunt, instantias dedisse sufficiat: Per-
gamus jam ad Problematum Geometricorum solu-
tiones.

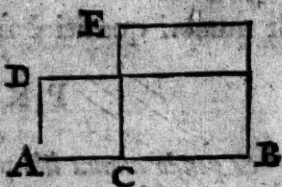
G

Quo-

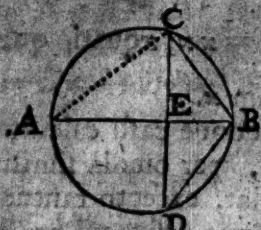
*¶ Nempe inveniendæ figuræ primas radicis per constructionem
quævis mechanicam & reliquas per methodum Vieta.*

Quomodo Quaestiones Geometricae ad aequationem redigantur.

Questiones Geometricae eadem facilitate iisdemque legibus ad aequationes nonnunquam redigi possunt ac quae de abstractis quantitativis proponuntur. Ut si recta AB in extrema & media proportionem secanda sit in C , hoc est ita ut BE quadratum maximae partis sit aequale rectangulo BD sub tota & minore parte contento: Posito $AB = a$, & $BC = x$ erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; aequatio quae per reductionem datur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - a^2}$.



Sed in rebus Geometricis quae frequentius occurrunt, à variis linearum positionibus & relationibus complexis ita dependere solent ut egeant ulteriori inventionem & artificio quo ad Algebraicos terminos deduci possint. Et licet in huiusmodi casibus difficile sit aliquid praescribere, & cuiusque ingenium sibi debeat esse operandi norma: Conabor tamen discipulis viam praesternere. Sciendum est itaque quod quaestiones circa easdem lineas definito quolibet modo sibi invicem relatas, possint varie proponi, ponendo alias atque alias quaerendas esse ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuscunque tamen datis vel quaesitis instituitur quaestio, solutio ejus eadem plane methodo ex Analyseos serie perficietur, nulla omnino circumstantia variata praeter fictas linearum species sive nomina quibus datas à quaesitis solemus distinguere. Quemadmodum si quaestio sit de Isoscele CBD in circulum inscripto, cujus latera BC , BD , & basis CD cum



cum diametro circuli AB conferenda sunt: Ea vel proponi potest de investigatione *diametri* ex datis lateribus & basi, vel de investigatione *basis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de investigatione *laterum* ex datis basi & diametro: Sed utrumque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem seriem Analyseos. Nempe si quæratür *Diameter* pono $AB = x$, $CD = a$, & EC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est $AB \cdot BC :: BC \cdot BE$, five $x \cdot b :: b \cdot BE$. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Est & $CE = \frac{1}{2} CD$ five $\frac{1}{2} a$: Et propter angulum CEB rectum,

$$CE^2 + BE^2 = BC^2, \text{ hoc est } \frac{1}{4} a^2 + \frac{b^4}{x^2} = b^2.$$

Quæ æquatio per reductionem dabit quæsitum x .

Sin quæratür *Basis*, pono $AB = c$, $CD = x$ & BC vel $BD = b$. Tum (ducta AC) propter similia triangula ABC & CBE est $AB \cdot BC :: BC \cdot BE$.

BE , five $c \cdot b :: b \cdot BE$. Quare $BE = \frac{bb}{c}$. Est &

$$CE = \frac{1}{2} CD \text{ five } \frac{1}{2} x, \text{ \& propter angulum CEB rectum } CE^2 + BE^2 = BC^2 \text{ hoc est } \frac{1}{4} x^2 + \frac{b^4}{c^2} = b^2,$$

æquatio quæ per reductionem dabit quæsitum x .

Atque ita si *Latus* BC vel BD quæratür, pono $AB = c$, $CD = a$ & BC vel $BD = x$. Et (AC ut ante ducta) propter similia triangula ABC & CBE est $AB \cdot BC :: BC \cdot BE$, five $c \cdot x :: x \cdot BE$.

Quare $BE = \frac{cx}{c}$. Est & $CE = \frac{1}{2} CD$ five $\frac{1}{2} a$:

& propter angulum CEB rectum est $CE^2 + BE^2 = BC^2$

= B C q, hoc est $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quaesitum x .

Vides itaque quod in unoquoque casu calculus quo pervenitur ad æquationem, per omnia similis sit, & eandem æquationem pariat, excepto tantum quod lineas aliis atque aliis literis designavi prout data vel quaesita ponuntur. Ex diversis quidem datis & quaesitis oritur diversitas in reductione æquationis inventæ: Nam æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$

alia est reductio ut obtineatur $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb - aa}}$

valor de A B, & æquationis $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$ alia

reductio ut obtineatur $x = \frac{2b}{c}\sqrt{cc - bb}$ valor de

C D; & æquationis $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$ reductio longe

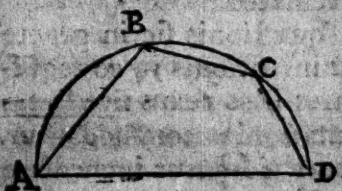
alia ut obtineatur $x = \sqrt{\frac{1}{2}cc} \pm \frac{1}{2}c\sqrt{cc - aa}$

valor de B C vel B D: (perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad eliciendum c , a , vel b diversis modis reduci debet:) sed in harum æquationum inventionem nulla fuit diversitas. Et hinc est quod jubent ut nullum inter datas & quaesitas quantitates habeatur discrimen. Nam cum eadem computatio cuique casui datorum & quaesitorum competat, convenit ut sine discrimine concipiantur & conferantur quo rectius judicetur de modis computandi: Vel potius convenit ut singas quaestionem de ejusmodi datis & quaesitis propositam esse per quas arbitreris te posse ad æquationem facillime pervenire.

Proposito

Proposito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involuit confer, & nullo inter datas & quæstas habito discrimine, perpende quomodo alia ex aliis dependeam ut cognoscas quanquam si assumantur, Synthetice gradiendo, dabunt ceteras. Ad quod faciendum non opus est ut prima fronte de modo cogites quo aliz ex aliis per calculum Algebraicum deduci possint, sed sufficit animadversio generalis quod possint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratia; si quæstio sit de circuli diametro A D tribusque lineis A B, B C, & C D in semicirculo inscriptis, & ex reliquis datis quæzatur B C; primo intuitu manifestum est diametrum A D determinare semicirculum, dein lineas A B & C D per inscriptionem determinare puncta B & C atque adeo quæsitum B C, idque nexu maxime directo; & quo pacto tamen B C ex his datis per Analysin eruatur non

ita manifestum est. Hoc idem quoque de A B vel C D si ex reliquis datis quæzerentur intelligendum est. Quod si A D ex datis A B, B C & C D quæzeretur, æque patet id non fieri posse Synthe-



tice; siquidem punctorum A ac D distantia dependet ex angulis B & C, & illi anguli ex circulo cui datae lineæ sunt inscribendæ, & ille circulus non datur ignota A D diametro. Rei igitur natura postulat ut A D non Synthetice sed ex ejus assumptione quæzatur ut ad data fiat regressus.

Cum varios ordines quibus termini quæstionis sic evolvi possint perspexeris, E synthetice quoslibet adhibe, assumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facilissimus videtur progressus & ad ipsas vicissim difficillimus. Nam computatio ut per varia media possit incedere, tamen ab istis lineis initium sumet;

so promptius perficietur fingendo quæstionem ejusmodi esse ac si de istis datis & quæsito aliquo ab istis facillime prodituro institueretur, quam de quæstione prout revera proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato si ex reliquis datis quæritur $A D$, cum id synthetice fieri non posse percipiam, sed ab ipso tamen, si modo daretur, discursum ad alio directo nexu incedere, assumo $A D$ tanquam datum & abinde computationem non secus incipio quam si revera daretur & aliqua ex datis $A B$, $B C$ & $C D$ quæreretur. Atque hac inethodo computationem ab assumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejusdem aliqujus quantitatis valores semper obtinebitur, sive ex valoribus unus sit litera sub initio operis quantitati pro nomine imposita, & alter per computationem inventus, sive uterque per computationem diversimode institutam inveniatur.

Ceterum ubi terminos quæstionis sic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur ut advertas particulares istos nexus sive linearum relationes quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxius perpendenti videantur immediate & relatione proxima connecti, cum illam relationem algebraice designare volumus, circuitum plerumque quoad constructiones Schematum de novo molientes & computationem per gradus promovendam exigunt: Quemadmodum de $B C$ ex $A D$, $A B$ & $C D$ colligendo constare potest. Per ejusmodi enim propositiones vel enunciationes solummodo gradiendum est quæ aptæ sunt ut terminis algebraicis designentur, quales præsertim ab Axioma 19. Prop. 4. lib. 6. & Prop. 47. lib. 1. Elem. procedunt.

Præterea itaque promovetur calculus per additionem vel subtractionem linearum eo ut ex valoribus

his partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundo promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim (ut supra) factum à mediis terminis divisum per alterutrum extremorum esse valorem alterius. Vel quod perinde est, si valores omnium quatuor proportionalium prius habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum vero proportionalitas ex triangulorum similitudine maxime se prodit, quæ cum ex æqualitate angulorum dignoscatur, in iis comparandis Analysta debet esse perspicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29, & 34. lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8. lib. 6. Et Prop. 22, 24, 25, 27 & 31. lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri potest Prop. 3. lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas & contra. Atque idem aliquando præstant Prop. 35 & 36. lib. 3.

Tertio promovetur per additionem vel subtractionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum ut obtineatur quadratum maximæ, vel à quadrato maximæ lateris subducimus quadratum unius à minoribus ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (si adnumeretur Prop. 1. lib. 6. Elem. cum de superficiebus agitur, ut & aliquæ propositiones ex lib. 11 & 12. desumptæ cum agitur de solidis) tota Ars Analytica quoad Geometriam rectilineam innititur. Quæ etiam ad solas linearum ex partibus compositiones & similitudines triangulorum possunt omnes Problematum difficultates reduci: adeo ut non opus sit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo resolvi possunt, & proinde solutiones etiam quæ ex illis deprehenduntur. Inque huius rei

instantiam subjunxi Problema de perpendicularo in basem obliquanguli trianguli demittendo sine adjumento Prop. 47. lib. 1. solutum. Etsi vero juvet simplicissima principia à quibus problematum solutiones dependent non ignorasse, & istis solis adhibitis posse quolibet solvere; expeditionis tamen gratia convenit ut non solum Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus usus est frequentissimus; sed & alia, etiam Theoremata nonnunquam adhibeantur.

Quemadmodum si perpendicularo in basem obliquanguli trianguli demisso, de segmentis basis ad calculum promovendum agatur; ex usu erit scire quod, Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo sub basi & distantia perpendiculari à medio basis.

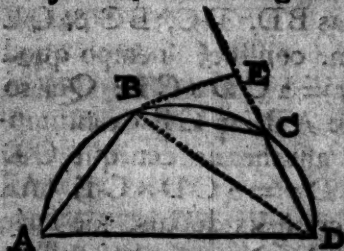
Si trianguli alicujus verticalis angulus biseccetur, computationi non solum inserviet quod basis secetur in ratione laterum, sed etiam quod differentia factorum à lateribus & à segmentis basis æquetur quadrato lineæ biseccantis angulum.

Si de figuris in circulo inscriptis res est, Theorema non raro subveniet quod Inscripti cujuslibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur summæ factorum à lateribus oppositis.

Et hujusmodi plura inter exercendum observet Analysta, & in penum forte reserret; sed parcius utatur si pari facilitate aut non multo difficilius possit solutionem è simplicioribus computandi principijs extruere. Quamobrem ad tria primo proposita tanquam notiora, simpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen sufficientia apimum præsertim advertat, & omnes difficultates ad ea præceteris reducere conetur.

Sed ut hujusmodi Theoremata ad solvenda Problemata accommodari possint, Schemata plerumque sunt ultra construenda, idque sæpissime producendo aliquas ex lineis donec seceperit alias, aut sint assignata

hæc longitudinis; vel ab insigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel insigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam construendo, prout exigunt status Problematis, & Theoremata quæ ad ejus solutionem adhibentur. Quemadmodum si duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte ut concurrentes constituent triangulum cujus anguli & proinde laterum rationes dantur. Vel si quilibet angulus detur, aut sit alicui æqualis, in triangulum sæpe complemus specie datum, aut alicui simile, idque vel producendo aliquas ex lineis in schemate vel subtensam aliter ducendo. Si triangulum sit obliquangulum, in duo rectangula sæpe resolvimus, demittendo perpendicularum. Si de figuris multilateris agatur, resolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: Et sic in cæteris; ad hanc metam semper collimando ut *schema in triangula vel data, vel similia, vel rectangula resolvatur.* Sic in exemplo



proposito duco diagonum BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum resolvatur. Deinde resolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula demittendo perpendicularum à quolibet ejus angulo B, C, vel D in latus oppositum: quemadmodum à B in CD productam ad E ut huic perpendicularo BE occurrat. Interea vero cum anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3. Elem.) perinde ac BCE & BCD constituent; percipio angulos BAD & BCE æquales esse, adeoque triangula BCE ac DAB similia. Atque ita video computationem (assumendo AD, AB & BC tanquam

quam si CD quæreretur) ad hunc modum institui
 posse, viz. AD & AB (propter tri. ABD rect.)
 dant BD , AD , AB , BD & BC (propter sim.
 tri. ABD & CEB) dant BE & CE . BD & BE
 propter triang. BED rect.) dant ED ; & ED
 — EC dat CD . Unde obtinebitur æquatio inter
 valorem de CD sic inventum & literam pro ea
 fuisseam. Possumus etiam (& maximam partem
 fatius est quam opus in serie continuata nimis
 prosequi,) a diversis principiis computationem in-
 cipere, aut saltem diversis modis ad eandem quam-
 libet conclusionem promovere, ut duo tandem ob-
 tineantur ejusdem cujusvis quantitatis valores qui
 æquales ponantur. Sic AD , AB & BC dant
 BD , BE & CE ut prius; deinde CD + CE dat
 ED ; ac denique BD & ED (propter triang.
 rect. BED) dant BE . Potest etiam computatio
 hac lege optime institui ut valores quantitatum
 investigentur quibus alia quapiam relatio cognita
 intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit.
 Sic cum relatio inter lineas BD , DC , BC & CE
 ex Prop. 12. lib. 2. Elem. constet; nempe quod
 sit $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$: Quæro
 BDq ex assumptis AD & AB ; ac CE ex assump-
 tis AD , AB & BC . Et assumendo denique CD
 facio $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$. Ad
 hos modos & hujusmodi consiliis ductus, de serie
 Analyticæ, deque schemate propter eam constru-
 endo semper debes una prospicere.

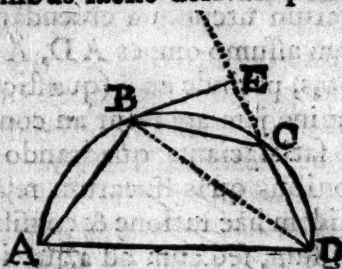
Ex his credo manifestum est quid sibi velint
 Geometra cum jubent putes factum esse quod qua-
 ris. Nullo enim inter cognitæ & incognitæ quan-
 titates habito discrimine, quolibet ad ineundum
 calculum assumere potes quasi omnes ex prævia so-
 lutione fuissent notæ, & non amplius de solutione
 Problematis, sed de probatione solutionis ageretur.
 Sic in primo ex tribus jam descriptis computandi
 modis,

modis, etsi forte AD revera queratur, fingo tamen CD querendum esse, quasi vellem probare an valor ejus ab AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognita. Sic etiam in duobus posterioribus modis pro meta non propono quantitatem aliquam querendam esse, sed æquationem & relationibus linearum utcumque eruendam: Et in ejus rei gratiam assumo omnes AD, AB, BC, & CD tanquam notas, perinde ac si (quæstione prius soluta) de tentamine jam ageretur an conditionibus ejus hæc probe satisfaciant, quadrando cum quibuscumque æquationibus quas linearum relationes produunt. Opus quidem hac ratione & consiliis prima fronte aggressus sum, sed cum ad æquationem deventum est sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæto. Sic denique plures quantitates tanquam cognitæ saepenumero assumimus quam in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 55^o sequentium problematum instantiam videre est, ubi a, b & c in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ assumpsi, ut & alias etiam lineas r, s, t, v de quibus Problema prout proponitur nihil innuit. Nam quælibet quantitates assumere licet quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire: Hoc solum cavendo ut ex illis tot æquationes obtineri possint quot assumptæ sunt quantitates revera incognitæ.

Postquam de computandi methodo constat & ornatur schema, quantitativis quæ computationem ingredientur (hoc est ex quibus assumptis aliarum valores derivandi sunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone, delegendo quæ problematis omnes condiciones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & conclusionem (quantum possis conjicere) simpliciorum reddent, sed non plures tamen quam proposito sufficiunt. Itaque pro quantitativis quæ ex aliarum

voca-

vocabulis facile deduci possint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex tota linea & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus unum aliquod minimum sine nomine permittere solemus, eo quod valor ejus è reliquorum nominibus facile derivari possit. Quemadmodum in exemplo jam allato si dicam $AD = x$ & $AB = a$ ipsum BD nulla litera designo quod fit tertium latus trianguli rectanguli ABD & proinde valeat $\sqrt{x^2 - a^2}$.



Dein si dicam $BC = b$, cum triangula DAB & BCE sint similia & inde lineæ AD , AB , & BC proportionales, quarum tribus AD , AB , & BC imposita sunt nomina; ea propter quartam CE sine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$ ex hac proportionalitate detectum usurpo. At-

que ita si DC vocetur c , ipsi DE nomen non assigno quod ex partibus ejus DC & CE , sive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat

Cæterum dum de his moneo, Problema ad æquationem pene redactum est. Nam postquam literæ pro speciebus principalium linearum præscriptæ sunt, nihil aliud agendum restat quam ut ex istis speciebus valores aliarum linearum juxta methodum præconceptam eruantur, donec modo quovis proviso in æquationem coeant. Et in hoc casu nihil restare video nisi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE . Nempe est BCq

$$BCq - CEq \text{ (five } bb - \frac{aabb}{xx}) = BEq, \text{ ut \&}$$

$$BDq - DEq \text{ (five } xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx})$$

$$= BEq. \text{ Et hinc (utrobique deleto } \frac{aabb}{xx}) \text{ aequa-}$$

$$\text{tionem habebo } bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}:$$

$$\text{Quæ reducta fit } x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bbx + 2abc. \\ +cc \end{matrix}$$

Cum vero de solutione Problematis hujus plures modos etsi non multum dissimiles in præcedentibus recensuerim quorum iste de Prop. 12. Lib. 2. Elem. desumptus sit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam subungere. Sit itaque $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, & $CD = c$,

$$\text{eritque } BDq = xx - aa, \text{ \& } CE = \frac{ab}{x} \text{ ut prius.}$$

Hiscæ dein speciebus in Theorema $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$ substitutis orietur

$$xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}; \text{ \& facta reducti-}$$

$$\text{one } x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bbx + 2abc. \\ +cc \end{matrix} \text{ Ut ante.}$$

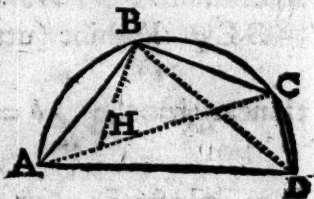
Sed ut pateat quanta sit in solutionum inventionē varietas, & proinde quod in eas incidere prudenti Geometræ non sit admodum difficile: Visum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem ducto Diagonio BD si vice perpendiculari BE à puncto B in latus DC supra demissi demittatur perpendicularum à puncto D in latus BC vel à puncto C in latus BD , quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcun-
que

que resolvatur, iisdem ferme quas jam descripti methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab istis satis differentes.

Quemadmodum si diagoni duo AC & BD ducantur, dabitur BD ex assumptis AD & AB; ut & AC ex assumptis AD & CD; deinde per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inscriptis, nempe quod sit $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$ obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c ; erit $BD = \sqrt{xx - aa}$ & $AC = \sqrt{xx - cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum speciebus in Theorema jam recensitum substitutis, exhibit $xb + ac = \sqrt{xx - cc} \times \sqrt{xx - aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis obtinebitur iterum

$$x^3 = +aa + bbx + 2abc + cc$$

Caterum ut pateat etiam quo pacto solutiones ex isto Theoremate petitz possint inde ad solas triangularum similitudines redigi; erigatur BH ipsi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangu-
 angula BCH, BDA similia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangu-
 la BCD, BHA similia, propter æqua-
 les angulos tum ad B (ut pateat demendo commu-
 nem angulum DBH à duobus rectis,) tum ad D
 ac A (per 21. 3. Elem.) Videre est itaque quod ex
 proportionalitate BD. AD :: BC. HC detur HC;
 ut & AH ex proportionalitate BD. CD :: AB.
 AH. Unde cum sit $AH + HC = AC$, habe-
 bitur



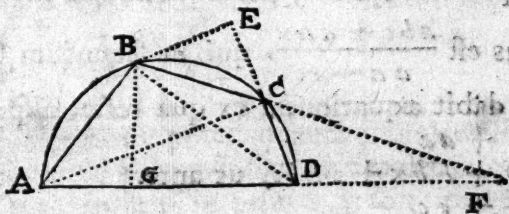
G E O M E T R I C A R U M. III

bitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum
vocalibus x, a, b, c , nec non ipsarum AC & BD
valoribus $\sqrt{xx - cc}$ & $\sqrt{xx - aa}$; prima propor-
tionalitas dabit $HC = \frac{bx}{\sqrt{xx - aa}}$, & secunda da-

bit $AH = \frac{ac}{\sqrt{xx - aa}}$. Unde propter $AH + HC$
 $= AC$ erit $\frac{bx + ac}{\sqrt{xx - aa}} = \sqrt{xx - cc}$; æquatio quæ

(multiplicando per $\sqrt{x x - a a}$ & quadrando) reducetur ad formam in præcedentibus sæpius descriptam.

Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F , & fient triangula ABF & CDF similia, quippe



quorum angulus ad F communis est, & anguli A B F
& C D F (cum complent ang. C D A ad duos re-
ctos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem si præter quatuor terminos de quibus instituitur quæstio, daretur A F, proportio A B : A F :: C D : C F daret C F. Item A F — A D daret D F, & proportio C D : D F :: A B : B F daret B F; unde (cum sit B F — C F = B C) emergeret æquatio. Sed cum duæ quantitates incognitæ A D ac D F tanquam datæ assumantur, restat alia æquatio invenienda. Demitto ergo B G in A F ad rectos angulos

gulos, & proportio A D. A B :: A B. A G. dabit A G; quo habito, Theorema è 13. 2. Elem. petitum, nempe quod sit $B F q + 2 F A G = A B q + A F q$, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut prius, & dicto $A F = y$: erit

(insistendo vestigiis Theoriz jam excogitata) $\frac{cy}{a}$

= C F. $y - x = D F$. $\frac{y - x \times a}{c} = B F$. Indeque

$\frac{y - x \times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam

$\frac{aa}{x} = A G$, adeoque $\frac{aa yy - 2 a a x y + a a x x}{cc}$

$+ \frac{2 a a y}{x} = a a + y y$, æquatio secunda. Quæ duæ

per reductionem dabunt æquationem desideratam. Nempe valor ipsius y per æquationem priorem in-

ventus est $\frac{a b c + a a x}{a a - c c}$, qui in secundam substitu-

tus, dabit æquationem ex qua recte disposita fiet

$$x^3 = \begin{matrix} + a a \\ + b b x + 2 a b c, \text{ ut ante.} \\ + c c \end{matrix}$$

Atque ita si A B ac D C producantur donec sibi mutuo occurrant, solutio haud aliter se habebit, nisi forte futura sit paulo facilior. Quare aliud hujus rei specimen è fonte multum dissimili petitum potius subjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propositi, idque dupliciter. Duco igitur diagonium B D ut in duo triângula quadrilaterum resolvatur. Dein usurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut ante, invenio $B D = \sqrt{x x - a a}$ indeque $\frac{1}{2} a \sqrt{x x - a a}$ ($= \frac{1}{2} A B \times B D$) aream triânguli A B D. Porro demisso B E perpendiculariter in

GEOMETRICARUM. 113

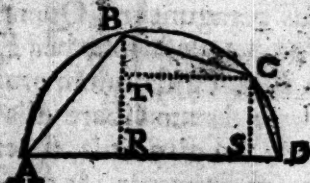
In CD, (erit propter similia triangula ABD, BCE) AD.BD::BC.BE, & proinde BE =

$\frac{b}{x} \sqrt{xx - aa}$. Quare etiam $\frac{bc}{2x} \sqrt{xx - aa}$ (= $\frac{1}{2} CD \times BE$) erit area trianguli BCD. Hasce jam areas addendo orietur $\frac{ax + bc}{2x} \sqrt{xx - aa}$ area to-

tius quadrilateri. Non secus ducendo diagonium AC & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rursus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx + ba}{2x} \sqrt{xx - cc}$. Quare ponendo

hasce areas æquales & utrasque multiplicando per 2x, habebitur $ax + bc \sqrt{xx - aa} = cx + bax \sqrt{xx - cc}$, æquatio quæ quadrando ac dividendo per $aa x - cc x$ redigetur ad formam sæpius inventam $x^3 = + aax + b b x + 2abc.$
 $+ cc$

Ex his constare potest quanta sit solvendi copia & obiter quod alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primas de solutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi male accommodatus inciderit, relationes linearum iterum evolvendæ sunt donec modum quam poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quæ leviori curæ se offerunt laborem satis molestum plerumque parient si ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur nil difficilius foret in sequentem modum quam in aliquem e præcedentibus incidere. Demissis nempe BR & CS ad AD normales



H

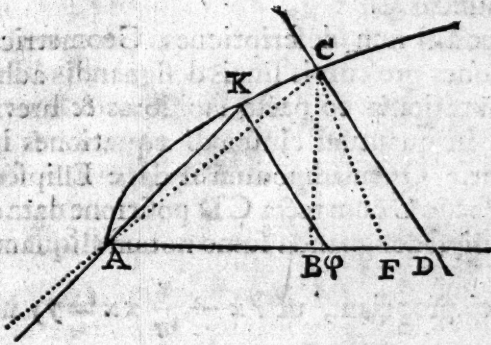
malibus

malibus, ut & CT ad BR , figura resolveretur in triangula rectangula. Et videre est quod AD & AB dant AR , AD & CD dant SD , $AD - AR - SD$ dat RS vel TC . Item AB & AR dant BR , CD & SD dant CS vel TR , & $BR - TR$ dat BT . Denique BT ac TC dant BC , unde obtinebitur æquatio, Siquis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos Algebraicos profusiores quam sunt ulli præcedentium incidet & ad finalem æquationem ægrius reducibiles.

Et hæc de solutione problematum in rectilinea Geometria; nisi forte operæ pretium fuerit annotasse præterea quod cum anguli sive positiones linearum per angulos expressæ statum questionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi linearum aut linearum proportionēs, tales nempe quæ ab angulis datis possunt per calculum Trigonometricum derivari; aut à quibus inventis anguli quaesiti per eundem calculum prodeunt; hoc est quæ se mutuo determinant: cujus rei plures instantias videre est in sequentibus.

Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ designari solent vel describendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinite exprimentes relationem rectarum certæ aliquæ lege dispositarum & ad curvas desinentium. Idem fecerunt Veteres per sectiones Solidorum, sed minus commode. Computationes vero quæ curvas primo modo descriptas respiciunt haud secus quam in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum si AKC sit curva linea descripta per K verticale punctum normæ AK , cujus unum crus AK per punctum A positione datum libere dilabitur, dum alterum K data longitudinis super rectam AD positione datam promovetur, & quaeratur punctum C in quo recta quavis CD positione

one data hanc curvam fecabit; duco rectas A C F
quæ normam in positione quaesita referant, & rela-



tione linearum (sine aliquo dati & quæsitæ discrimine aut respectu ad curvam) considerata, percipio dependentiam cæterarum à CF & qualibet harum quatuor BC, BF, AF & AC Syntheticam esse; quarum duas itaque ut $CF = a$ & $CB = x$ assumo, & inde computum ordiendo statim lucratus

$$\text{sum } BF = \sqrt{aa - xx} \text{ \& } AB = \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}} \text{ prop.}$$

ter ang. rectum CBF, lineasque BF. BC::BC.
AB continue proportionales. Porro ex data po-
sitione CD datur AD quam itaque dico *b*, datur
etiam ratio BC ad BD quam pono *d* ad *e* & fit

$$BD = \frac{ex}{d} \text{ \& } AB = b - \frac{ex}{d}. \text{ Est ergo } b -$$
$$\frac{ex}{d} = \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}, \text{ æquatio quæ (quadrando partes}$$

& multiplicando per $aa - xx$ &c.) reducetur ad hanc

$$\text{formam } x^4 = \frac{2bde x^3 - bbd x^2 - 2aabdex + aabdd}{dd + ee};$$

H 2

undo

Quinetiam etſi Curva per deſcriptionem Geometricam vel per ſectionem ſolidi deſignetur, poteſt tamen inde æquatio obtineri quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum quæ circa eam proponuntur difficultates reduci.

Sic in exemplo priori ſi AB dicatur x & BC y , tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$, cujus quadratum una cum quadrato BC æquatur CF q, hoc eſt $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; ſive $y^4 + xx yy = aaxx$. Eſt

que hæc æquatio qua Curvæ AKC unumquodque punctum C unicuique baſis longitudini AB congruens (adeoque ipſa Curva) definietur, & e qua proinde ſolutiones Problematum quæ de hac curva proponuntur petere liceat.

Ad eundem fere modum cum curva non datur ſpecie ſed determinanda proponitur, poſſis pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro ea deſignanda tanquam ſi daretur aſſumere, ut ex ejus aſſumptione quomodocunque perveniatur ad æquationes ex quibus aſſumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis ſequentium problematum quæ in pleniorẽ illustrationem hujus doctrinæ & exercitium diſcentium congeſſi, quæque jam pergo tradere.

PROB. I.

Data recta terminata BC a cuius extremitatibus
duæ rectæ BA , CA ducuntur in datis angu-
lis ABC , ACB : Invenire AD altitudi-
nem concursus A supra datam BC .

SIT $BC = a$, & $AD = y$; &
cum angulus ABD detur,
dabitur (ex tabula finuum vel
tangentialium) ratio inter lineas
 AD & BD quam pone ut d ad
 e . Est ergo $d : e :: AD (y) : BD$



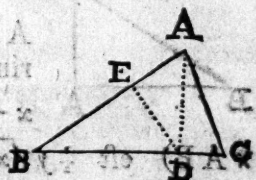
Quare $BD = \frac{ey}{d}$. Similiter propter datum angu-
lum ACD dabitur ratio inter AD ac DC quam
pone ut d ad f & erit $DC = \frac{fy}{d}$. At $BD + DC$
 $= BC$, hoc est $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Quæ reducta
multiplicando utramque partem æquationis per d ,
ac dividendo per $e + f$ evadit $y = \frac{ad}{e + f}$.

PROB.

PROB. II.

Cujuslibet Trianguli ABC datis lateribus AB , AC , & Basi BC quam perpendicularum AD ab angulo verticali secat in D : Invenire segmen-
ta BD , ac DC .

SIT $AB = a$, $AC = b$,
 $BC = c$, & $BD = x$, erit-
que $DC = c - x$. Jam cum
 $AB^2 - BD^2 = AD^2$ (a a - x x)
 $= AC^2 - DC^2$ (b b - c c + 2 c x - x x)
 $= AD^2$:
Erit $a a - x x = b b - c c + 2 c x - x x$; quæ per
reductionem fit $\frac{a a - b b + c c}{2 c} = x$

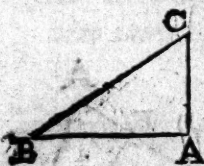


Cæterum ut pateat omnes omnium Problema-
tum difficultates per solam linearum præpropor-
tionalitatem sine adminiculo Prop. 47. primi Elemen-
torum, licet non absque circuitu enodari possit;
placuit sequentem hujus solutionem ex abundantia
subungere. A puncto D in latus AB demitte
 DE normalem, & stantibus jam positis linearum
nominibus, erit $AB : BD :: BD : BE$.

$a : x :: x : \frac{x x}{a}$. Et $BA - BE$ ($a - \frac{x x}{a}$)
 $= EA$. Nec non $EA : AD :: AD : AB$ adeo-
que $EA \times AB$ ($a a - x x$) $= AD^2$. Et sic ratio-
cinando circa triangulum ACD invenietur iterum
 $AD^2 = b b - c c + 2 c x - x x$. Unde obtinebi-
tur ut ante $x = \frac{a a - b b + c c}{2 c}$.

P R O B. III.

Trianguli rectanguli ABC perimetro & area datis invenire hypotenusam BC.



ESTO perimetro a , area bb ,
 $BC = x$, & $AC = y$; eritque
 $AB = \sqrt{xx - yy}$; unde rursus pe-
 rimeter $(BC + AC + AB)$ est
 $x + y + \sqrt{xx - yy}$, & area $(\frac{1}{2} AC$
 $\times AB)$ est $\frac{1}{2} y \sqrt{xx - yy}$. Adeoque $x + y +$
 $\sqrt{xx - yy} = a$, & $\frac{1}{2} y \sqrt{xx - yy} = bb$.

Harum æquationum posterior dat $\sqrt{xx - yy}$
 $= \frac{2bb}{y}$ quare scribo $\frac{2bb}{y}$ pro $\sqrt{xx - yy}$ in æ-
 quatione priori ut assymmetria tollatur; & prodit
 $x + y + \frac{2bb}{y} = a$, sive multiplicando per y , & or-
 dinando $yy = ay - xy - 2bb$. Porro ex parti-
 bus æquationis prioris aufero $x + y$ & restat
 $\sqrt{xx - yy} = a - x - y$, cujus partes quadrando
 ut assymmetria rursus tollatur, prodit $xx - yy$
 $= aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy$, quæ in
 ordinem redacta & per 2 divisa fit $yy = ay - xy$
 $+ ax - \frac{1}{2}aa$. Denique ponendo æqualitatem in-
 ter duos valores ipsius yy , habeo $ay - xy - 2bb$
 $= ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$, quæ reducta fit $\frac{1}{2}a$
 $= \frac{2bb}{a} = x$.

Idem aliter.

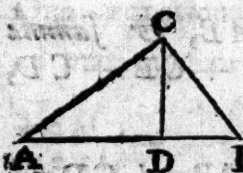
Esto $\frac{1}{2}$ perimetro $= a$, area $= bb$, & $BC = x$,
 eritque $AC + AB = 2a - x$. Jam cum sit xx
 (BCq)

GEOMETRICARUM 121

$\{BCq\} = ACq + ABq$, & $4bb = 2AC \times AB$,
erit $xx + 4bb = ACq + ABq + 2AC \times AB =$
quadrato ex $AC + AB =$ quadrato ex $2a - x =$
 $4aa - 4ax + xx$. Hoc est $xx + 4bb = 4aa$
 $- 4ax + xx$; quæ reducta fit $a - \frac{bb}{a} = x$.

PROB. IV.

*Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculari,
invenire triangulum.*



Trianguli ABC sit C re-
ctus angulus & CD per-
pendiculum inde ad basem
AB demissum. Detur AB
 $+ BC + AC = a$, & $CD = b$.
Pone basem $AB = x$, & erit
laterum summa $a - x$. Pone laterum differentiam
 y , & erit majus latus $AC = \frac{a - x + y}{2}$; minus
 $BC = \frac{a - x - y}{2}$. Jam ex natura trianguli re-
ctanguli est $ACq + BCq = ABq$, hoc est
 $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = xx$. Est & AB. AC ::
BC. DC, adeoque $AB \times DC = AC \times BC$, hoc
est $bx = \frac{aa - 2ax + xx - yy}{4}$. Per priorem æ-
quationem est $yy = xx + 2ax - aa$. Per poste-
riorem $yy = xx - 2ax + aa - 4bx$. Adeoque
 $xx + 2ax - aa = xx - 2ax + aa - 4bx$. Et
per reductionem $4ax + 4bx = 2aa$, sive $x =$
 $\frac{aa}{2a + 2b}$.

Geome-

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo, ut est summa perimetri & perpendiculari ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad basem, ut habet

Aufer $2x$ de a , & restabit $\frac{a^2 + x^2 - a^2}{2b}$ excessus laterum super basem.

Unde rursus, Ut in omni triangulo rectangulo, summa perimetri & perpendiculari ad perimetrum, ita perpendicularum ad excessum laterum super basem.

PROB. V.

Dati trianguli rectanguli basi AB, & summa perpendiculari & laterum CA + CB + CD, invenire triangulum.

Esto $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, & erit $AC + CB = a - x$. Pone $AC = CB = y$, & erit $AC = \frac{a - x + y}{2}$ & $CB = \frac{a - x - y}{2}$

Est autem $AC^2 + CB^2 = AB^2$, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{2} = bb$. Est & $AC \times CB$

$= AB \times CD$, hoc est $\frac{aa - 2ax + xx + yy}{4} = bx$.

Quibus comparatis fit $2bb - aa + 2ax - xx = yy = aa - 2ax + xx + 4bx$. Et per reductionem $xx = 2ax + 2bx - aa + bb$, & $x = a + b - \sqrt{2ab + 2bb}$.

Geometrice sic. In omni triangulo rectangulo de summa perimetri & perpendiculari aufer mediam proportionalem inter eandem summam & duplum basis, & restabit perpendicularum.

Idem

GEOMETRICARUM. 113

Idem aliter.

Sit $GA + CB + CD = a$, $AB = b$, & $AC = x$,

& erit $BC = \sqrt{bb - xx}$, $CD = \frac{x\sqrt{bb - xx}}{b}$. Et

$x + CB + CD = a$, five $CB + CD = a - x$,

atque adeo $\frac{b+x}{b}\sqrt{bb - xx} = a - x$. Et qua-

dratis partibus atque multiplicatis per bb , fiet

$-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = aabb - 2abx + b^2xx$,

Qua aequatione per transpositionem partium

ad hunc modum ordinata $x^4 + 2bx^3 + 3b^2x^2 + 2abx - b^4$

$+ 2b^3x + b^4 = 2abbx - 2ab^2x + 4b^3x$

$+ 2abbx + aabb = 2abxx + 4abbx$

$+ 2b^4$ & extracta utrobique radice, ori-

etur $xx + bx + bb + ab = x + b\sqrt{2ab + 2bb}$.

Et extracta iterum radice $x = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ab}$

$+ \sqrt{b\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}ab} - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab}$.

Constructio Geometrica.

Cape igitur $AB = \frac{1}{2}b$, $BC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}AB$,

AE mediam proportionalem inter b & AC , &

EF hinc inde mediam proportionalem inter b &

DE , & erunt BF , BF duo latera trianguli.

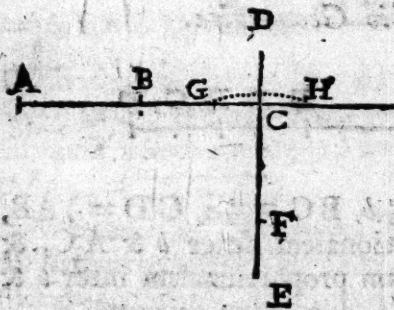
PROB.

P R O B. VI.

Datis in triangulo rectangulo ABC summa laterum AC + BC, & perpendicularo CD invenire triangulum.

SIT $AC + BC = a$, $CD = b$, $AC = x$, & erit
 $BC = a - x$, $AB = \sqrt{aa - 2ax + 2xx}$. Est
 & $CD, AC :: BC, AB$. Ergo rursus $AB = \frac{ax - xx}{b}$.

Quare $ax - xx = b\sqrt{aa - 2ax + 2xx}$, & partibus quadratis & ordinatis $x^4 - 2ax^3 + aa^2xx + 2abbx - aabb = 0$. Adde ad utramque partem $aabb + b^4$, & fiet $x^4 - 2ax^3 + aa^2xx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$. Et extracta utrobique radice $xx - ax - bb = -bx$.
 $\sqrt{aa + bb}$, & radice iterum extracta $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb - b\sqrt{aa + bb}}$.

Constructio Geometrica.

Cape $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendicularum CD = b. Produca DC ad E ut sit DE = DA. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC descriptus circulus

GH secet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

Idem

Idem aliter.

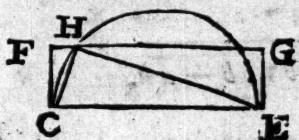
Sit $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$;
ac $DC = b$, & erit $\frac{a+y}{2} = AC$, $\frac{a-y}{2} = BC$;

$$\frac{aa + yy}{2} = ACq + BCq = ABq = xx. \frac{aa - yy}{4b}$$

$$= \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x. \text{ Ergo } 2xx - aa = yy$$

$= aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$, & extracta radice $x = -b + \sqrt{bb + aa}$. Unde in superiori constructione est CE Hypotenusa trianguli quæsit.

Data autem basi & perpendicularo tam in hoc quam in superiore Problemate, triangulum sic expedite construitur. Fac parallelo-



grammum CG cuius latus CE erit basis trianguli, latus alterum CF perpendicularum. Et super CE describe semicirculum secantem latus oppositum FG in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæsitum.

PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis summa laterum, & summa perpendiculari & basis invenire Triangulum.

SIT laterum AC & BC summa a , basis AB & perpendiculari CD summa b , latus AC $= x$, basis AB $= y$, & erit BC $= a - x$, CD $= b - y$,
 $aa - 2ax + 2xx = ACq + BCq = ABq = yy$,
 $ax - xx = AC \times BC = AB \times CD = by - yy$
 $= by - aa + 2ax - 2xx$, & $by = aa - ax + xx$

+ xx . Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3a^2xx - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb , hoc est æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$. Et ordinata æquatione fiet $x^4 - 2ax^3 + 3a^2xx - 2a^3x + a^4 = 0$. Ad utramque partem æquationis adde

$b^4 - aabb$, & fiet $x^4 - 2ax^3 + 3a^2xx - 2a^3x + 2abbx = b^4 - aabb$. Et extracta utrobique

radice $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$. & radice iterum extracta

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{bb - \frac{1}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}$$

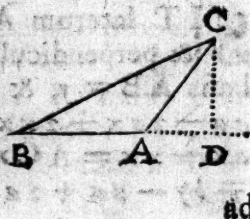
Constructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$, & S mediam proportionalem inter R & $b - a$, & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a + S$ & $\frac{1}{2}a - S$, & erunt $\frac{1}{2}a + T$ & $\frac{1}{2}a - T$, latera trianguli.

P R O B. VIII.

Trianguli cujuscunque ABC , datis area, perimetro, & uno angulorum A , cetera determinare.

ESTO perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro C ad latus oppositum AB demitte perpendicularum CD ; & propter angulum A datum, erit AC



ad

ad C.D. in data ratione, puta d ad e . Dic ergo

$AC = x$ & erit $CD = \frac{ex}{d}$, per quam divide du-

plam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex} = AB$. Adde AD

(nempe $\sqrt{ACq - CDq}$, sive $\frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$) & e-

merget $BD = \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$; cujus qua-

drato adde CDq & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e}x$

$\sqrt{dd - ee} = BCq$. Adhuc à perimetro aufer AC

& AB, & restabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} = BC$, cujus

quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$

$+ \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento;

&, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee}$

$= aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, assu-

mendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e}x$

$\sqrt{dd - ee}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$,

sive $x = f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodisset etiam querendo crus

AB; nam crura AB & AC similiter se habent ad

omnes conditiones problematis. Quare si AC po-

natur $f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$ erit $AB = f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

&

& vicissim; atque horum summa 2f subducta de perimetro relinquit tertium latus $BC = a - 2f$.

P R O B. IX.

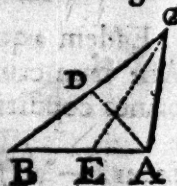
Datis altitudine, basi, & summa laterum invenire triangulum.

SIT altitudo $CD = a$, basis AB dimidium $= b$, laterum semisumma $= c$, & semidifferentia $= z$; eritque majus latus, puta $BC = c + z$, & minus $AC = c - z$. Subduc CDq de BCq & ACq , & exhibit hinc $BD = \sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$, & inde $AD = \sqrt{cc - 2cz + zz - aa}$. Subduc etiam AB de BD & exhibit iterum $AD = \sqrt{cc + 2cz + zz - aa - 2b}$. Quadratis jam valoribus AD & ordinatis terminis, orietur $bb + cz = b\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$. Rursusque quadrando & redigendo in ordinem obtinebitur $ccz - bba = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = b\sqrt{1 - \frac{aa}{cc - bb}}$. Unde dantur latera.

P R O B. X.

Datis basi AB , summa laterum $AC + BC$, & angulo verticali C , determinare latera.

SIT basis $= a$, semisumma laterum $= b$, & semidifferentia $= x$, eritque majus latus $BC = b + x$ & minus $AC = b - x$. Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppositum BC demitte perpendicularum AD & propter angulum C datum dabitur ratio AC ad CD puta d ad e , & proinde erit $CD = \frac{eb - ex}{d}$.



Est

GEOMETRICARUM. 129

Est etiam per 13. II. Elementorum $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$

hoc est $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x} = CD$; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit

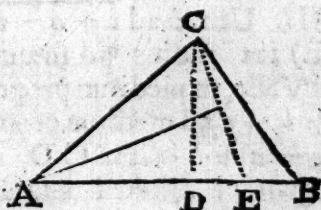
$$x = \sqrt{\frac{daa + 2ebb - 2dbb}{2d + 2e}}. \text{ Unde dantur latera.}$$

Si anguli ad basin quærentur, conclusio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum bisecans & basi occurrens in E; & erit AB. AC + BC (:: AE. AC) :: sin. ang. ACE. sin. ang. AEC. Et ab angulo AEC ejusque complemento BEC si subducatur dimidium anguli C relinquentur anguli ABC & BAC.

PROB. XI.

Datis Trianguli lateribus invenire angulos.

DEntur latera AB = a, AC = b, BC = c, quæratu-
r angulus A. Demisso ad AB perpendiculo CD quod angulo isti opponitur, erit imprimis



$$bb - cc = ACq - BCq = ADq - BDq = AD + BD \times AD - BD = AB \times \frac{AD - AB}{2} = 2AD \times a - aa. \text{ Adeoque } \frac{bb - cc}{2a} = AD.$$

Unde prodit hocce *primum Theorema.*

I. Ut AB, ad AC + BC, ita AC - BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{AB + N}{2} = AD.$

Ut AC ad AD, ita radius ad Cosinum anguli A. Adhæc

$$\begin{aligned}
 \text{Adhæc } DCq &= ACq - ADq \\
 &= \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa} \\
 &= \frac{a+b+c \times a+b-c \times a-b+c \times -a+b+c}{4aa}
 \end{aligned}$$

Unde multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b , conflatur hocce *Theorema secundum*.

II. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $a+b+c \times a+b-c$, & $a-b+c \times -a+b+c$, ita radius ad sinum anguli A.

Insuper in AB Cape AE = AC, & Age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & restabit DE = $b - \frac{1}{2}a$
 $\frac{bb-cc}{2a} = \frac{cc-aa+2ab-bb}{2a} = \frac{c+a-b \times c-a+b}{2a}$

$$\text{Unde } DEq = \frac{c+a-b \times c+a-b \times c-a+b \times c-a+b}{4aa}$$

Et hinc confit *Theorema tertium quartumque*, viz.

III. Ut $2ab$ ad $c+a-b \times c-a+b$ (ita AC ad DE) ita radius ad sinum versum anguli A.

IV. Et, ut medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

$$\begin{aligned}
 \text{Præterea est } CEq &= CDq + DEq \\
 &= \frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a} = \frac{b}{a} \times c+a-b \times c-a+b.
 \end{aligned}$$

Unde *Theorema quintum & sextum*.

V. Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut 1 ad medi. proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad $\frac{1}{2}CE$ vel CE ad DE) ita radius ad sinum dimidii anguli A.

VI.

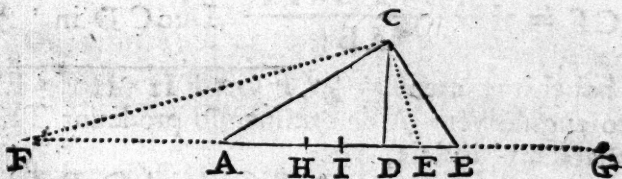
VI. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a + b + c$, & $a + b - c$ (ita CE ad CD) ita radius ad cosinum dimidii anguli A.

Si præter angulos desideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{2} ABq$, & radix viz. $\frac{1}{2} \sqrt{a+b+c \times a+b-c \times a-b+c \times -a+b+c}$, erit area illa quaesita.

P R O B. XII.

Trianguli cujuscvis rectilinei datis lateribus & basi, invenire segmenta basis, perpendicularum, aream & angulos.

Trianguli ABC dentur latera AC, BC & basis AB. Bifeca AB in I & in ea utrinque producta cape AF & AE æquales AC, atque BG &



BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad basem demitte perpendicularum CD. Et erit $ACq - BCq = ADq + CDq - BDq - CDq = ADq - BDq = AD + BD \times AD - BD = AB \times 2 DI$.

Ergo $\frac{ACq - BCq}{2 AB} = DI$. Et $2 AB \cdot AC + BC :: AC - BC \cdot DI$. Quod est Theorema pro determinandis segmentis basis.

De IE, hoc est de $AC - \frac{1}{2} AB$ aufer DI, & resta

$$\text{restabit DE} = \frac{BCq - ACq + 2AC \times AB - ABq}{2AB},$$

$$\text{hoc est} = \frac{BC + AC - AB \times BC - AC + AB}{2AB},$$

$$\text{five} = \frac{HE \times EG}{2AB}. \text{ Aufer DE de FE five } 2AC, \&$$

$$\text{restabit FD} = \frac{ACq + 2AC \times AB + ABq - BCq}{2AB},$$

$$\text{hoc est} = \frac{AC + AB + BC \times AC + AB - BC}{2AB},$$

$$\text{five} = \frac{FG \times FH}{2AB}. \text{ Et cum sit CD medium pro-}$$

portionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE & EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: erit CD

$$= \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}, \text{ CE} = \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}},$$

$$\& \text{ CF} = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}. \text{ Duc CD in } \frac{1}{2} AB$$

$$\& \text{ habebitur area} = \frac{1}{4} \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}.$$

Pro angulo vero A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, viz.

$$1. 2AB \times AC : HE \times EG (:: AC. DE) :: \text{radius ad sinum versum anguli A.}$$

$$2. 2AB \times AC. FG \times FH (:: AC. FD) :: \text{radius ad cosin. vers. A.}$$

$$3. 2AB \times AC. \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG} (:: AC. CD) :: \text{rad. ad sin. A.}$$

$$4. \sqrt{FG \times FH} \cdot \sqrt{HE \times EG} (:: CF. CE) :: \text{rad. ad tang. } \frac{1}{2} A.$$

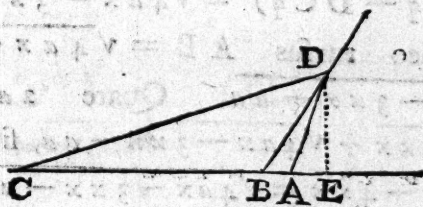
$$5. \sqrt{HE \times EG} \cdot \sqrt{FG \times FH} (:: CE. FC) :: \text{rad. ad cotang. } \frac{1}{2} A.$$

6. $2\sqrt{AB \times AC} \cdot \sqrt{HE \times EG} (:: FE. CE) ::$
rad. ad fin. $\frac{1}{2} A$.

7. $2\sqrt{AB \times AC} \cdot \sqrt{FG \times FH} (:: FE. FC) ::$
rad. ad cosin. $\frac{1}{2} A$.

PROB. XIII.

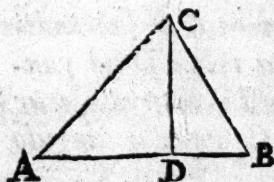
Datum angulum CBD recta data CD subtendere; ita ut si à termino istius recta D ad punctum A in recta CB producta datum agatur AD, fuerit angulus ADC equalis angulo ABD.



Dicatur $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, & erit
 $BD. BA :: CD. DA = \frac{ab}{x}$. Demitte per-
 pendiculum DE, Erit $BE = \frac{BD^2 - AD^2 + BA^2}{2BA}$
 $= \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$. Ob datum angulum DBA
 pone $BD. BE :: b. e$, & habebitur iterum $BE =$
 $\frac{ex}{b}$, ergo $xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex$. Et $x^4 - 2ex^2$
 $+ bbbx - aabb = 0$.

P R O B. XIV.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC & perpendicularum DC, sunt in Arithmetica progressionē.



DIC $AC = a$, $BC = x$;
& erunt $DC = 2x - a$,
& $AB = 2a - x$. Erunt eti-
am $AD (= \sqrt{AC^2 - DC^2})$
 $= \sqrt{4ax - 4xx}$ & BD

$(= \sqrt{BC^2 - DC^2}) = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$.

Atque adeo rursus $AB = \sqrt{4ax - 4xx}$

$+ \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Quare $2a - x =$

$\sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$, five $2a -$

$x - \sqrt{4ax - 4xx} = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Et

partibus quadratis $4aa - 3xx - 4a + 2xx$

$\sqrt{4ax - 4xx} = 4ax - 3xx - aa$, five $5aa$

$- 4ax = 4a - 2x\sqrt{4ax - 4xx}$. Et partibus

iterum quadratis ac terminis rite dispositis

$16x^4 - 80ax^3 + 144aaxx - 104a^3x + 25a^4 = 0$.

Hanc æquationem divide per $2x - a$, & orietur

$8x^3 - 36aax + 54aax - 25a^3 = 0$, æquatio

cujus resolutione dabitur x ex assumpto utcumque a .

Habitis a & x constitue triangulum cujus latera

erunt $2a - x$, a , & x ; & perpendicularum in latus

$2a - x$ demissum erit $2x - a$.

Si posuissē differentiam laterum trianguli esse d ,

& perpendicularum esse x ; opus evasisset aliquan-

to concinnius, prodeunte tandem æquatione

$x^3 = 24ddx + 48d^3$.

P R O B.

PROB. XV.

Invenire Triangulum ABC cujus tria latera AB, AC, BC, & perpendicularum CD, sunt in Geometrica progressionē.

$$\text{DIC } AC = x, \text{ \& } BC = a; \text{ \& } \text{erit } AB = \frac{xx}{a}.$$

$$\text{Et } CD = \frac{aa}{x}. \text{ Est \& } AD (= \sqrt{ACq - CDq})$$

$$= \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}; \text{ \& } BD (= \sqrt{BCq - DCq})$$

$$= \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}; \text{ adeoque } \frac{xx}{a} (= AB) = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$$

$$+ \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}, \text{ sive } \frac{xx}{a} - \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}.$$

$$\text{Et partibus æquationis quadratis, } \frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a}x$$

$$\sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + aa - \frac{a^4}{xx} = xx - \frac{a^4}{xx}, \text{ hoc est}$$

$$x^4 - aaxx + a^4 = 2aax\sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}. \text{ Et parti-}$$

$$\text{bus iterum quadratis } x^8 - 2aax^6 + 3a^4x^4 - 2a^6xx$$

$$+ a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6xx. \text{ Hoc est } x^8 - 2aax^6$$

$$- a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0. \text{ Divide hanc æqua-}$$

$$\text{tionem per } x^4 - aaxx - a^4, \text{ \& } \text{orietur } x^4 - aaxx$$

$$- a^4. \text{ Quare est } x^4 = aaxx + a^4. \text{ Et extracta}$$

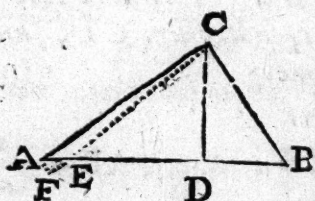
$$\text{radice } xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4}, \text{ sive } x = a\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}}.$$

$$\text{Cape ergo } a \text{ sive } BC \text{ cujusvis longitudinis, \& fac}$$

$$BC. AC :: AC. AB :: 1. \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}}; \text{ \& } \text{trianguli}$$

$$ABC \text{ ex his lateribus constituti perpendicularum}$$

$$DC \text{ erit ad latus } BC \text{ in eadem ratione.}$$

Idem aliter.

Cum fit $AB. AC :: BC. DC$ dico angulum ACB rectum esse. Nam si negas age CE constituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo tri-
angula BCE, DBC si-

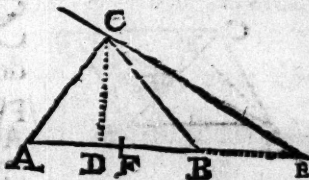
milia per 8. VI. Elem. adeoque $EB. EC :: BC. DC$. hoc est $EB. EC :: AB. AC$. Age AF perpendiculararem CE & propter parallelas AF, BC , erit $EB. EC :: AE. FE :: AB. FC$. Ergo per 9. V. Elem. est $AC = FC$, hoc est Hypotenusa trianguli rectanguli æqualis lateri contra 19. I. Elem. Non est ergo angulus ECB rectus, & proinde ipsum ACB rectum esse oportet. Est itaque $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Sed est $AC^2 = AB \times BC$, ergo $AB \times BC + BC^2 = AB^2$, & extracta radice $AB = \frac{1}{2} BC + \sqrt{\frac{1}{4} BC^2}$. Quamobrem cape BC .
 $AB :: 1. \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB , & triangulo ex his lateribus constituto, erunt $AB. AC. BC. DC$ continue proportionales.

P R O B.

PROB. XVI.

Super data basi AB triangulum ABC constituere, cujus vertex C erit ad rectum EC positione datam, basis autem medium existet Arithmeticum inter latera.

B Asis AB bisegetur in F, & producatu-
nec recta EC positione
data occurrat in E, &
ad ipsam demittatur per-
pendicularis CD; dictis-
que $AB = a$, $FE = b$, & $BC - AB = x$, erit BC
 $= a + x$, $AC = a - x$. Et per 13. II. Elem. BD
 $(= \frac{BC^2 - AC^2 + AB^2}{2AB}) = 2x + \frac{1}{2}a$. Adeoque



$FD = 2x$, $DE = b + 2x$, & $CD (= \sqrt{CB^2 - BD^2})$
 $= \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Sed propter datas positiones re-
ctarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque
& ratio DE ad CD; quæ si ponatur d ad e dabit
analogiam $d. e :: b + 2x. \sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$. Unde,

æquatio $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}aa - 3xx}$, cu-
jus partibus quadratis & rite dispositis, fit
 $xx = \frac{\frac{3}{4}ddaa - eebb - 4eebx}{4ee + 3dd}$. Et radice extracta

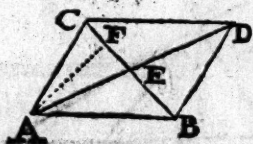
$$x = \frac{-2eeb + d\sqrt{3eeaa - 3eebb + \frac{9}{4}ddaa}}{4ee + 3dd}$$

Dato autem x , datur $BC = a + x$ & $AC = a - x$.

PROB.

P R O B. XVII.

Datis Parallelogrammi cujuscunque lateribus AB, BD, DC & AC, & una linea diagonali BC, invenire alteram diagonalem AD.



SIT E concursus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, & per 13. II. Elementorum erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = CF$,

etque etiam $\frac{ACq - AEq + ECq}{2EC} = CF$. Quare

cum sit $EC = \frac{1}{2}BC$, & $AE = \frac{1}{2}AD$, erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = \frac{ACq - \frac{1}{4}ADq + \frac{1}{4}BCq}{BC}$, &

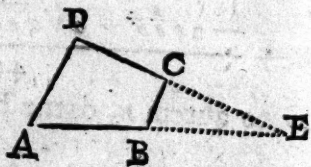
facta reductione $AD = \sqrt{2ACq + 2ABq - BCq}$.

Unde obiter in quolibet parallelogrammo, summa quadratorum laterum aequatur summa quadratorum diagonalium.

P R O B. XVIII.

Datis Trapezii ABCD angulis, perimetro, & area, determinare latera.

LATERA duo quolibet AB ac DC produc donec concurrant in E, fitque $AB = x$ & $BC = y$ & propter angulos omnes datos dantur rationes BC



ad

ad CE & BE; quas pone d ad e & f ; & erit $CE = \frac{ey}{d}$

& $BE = \frac{fy}{d}$ adeoque $AE = x + \frac{fy}{d}$. Dantur etiam

rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d ;

& erit $AD = \frac{dx + fy}{g}$ & $ED = \frac{dx + fy}{h}$, adeoque

$CD = \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$, & summa omnium laterum

$x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$; quæ, cum de-

tur, esto a , & abbrevientur etiam termini scribendo

$\frac{p}{r}$ pro dato $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h}$

$-\frac{e}{d}$, & habebitur æquatio $\frac{px + qy}{r} = a$.

Adhæc propter datos omnes angulos datur ratio

BCq ad triangulum BCE, quam pone m ad n &

erit triang. BCE = $\frac{n}{m}yy$. Datur etiam ratio AEq

ad triangulum ADE; quam pone m ad d ; & erit

triang. ADE = $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Quare cum

area AC, quæ est horum triangulorum differentia,

detur, esto bb & erit $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy - dnyy}{dm} = bb$.

Atque ita habentur duæ æquationes ex quarum re-

ductione omnia determinantur. Nempe superior

æquatio dat $\frac{ra - qy}{p} = x$, scribendo $\frac{ra - qy}{p}$ pro x

in inferiori, provenit $\frac{dr raa - 2dqr ay + dq qyy}{ppm}$

$+ \frac{2afry - 2fqyy}{pm} + \frac{ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Et abbrevia-

tis

anguli AEI = $\frac{e x x}{2 d}$. Sed propter æquales angulos & latera, triângula AEI & AEK sunt æqualia, adeoque trapezium IK (= 2 triâng. AEI)

= $\frac{e x x}{d}$. Simili modo ponendo BL. LF :: d. f,

& CN. NG :: d. g, & DP. PH :: d. h, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C,

ac D) habebitur trapezium LM = $\frac{f x x}{d}$, NO = $\frac{g x x}{d}$,

& PQ = $\frac{h x x}{d}$. Quamobrem $\frac{e x x}{d} + \frac{f x x}{d} + \frac{g x x}{d}$

+ $\frac{h x x}{d}$ five $\frac{p x x}{d}$ scribendo p pro e + f + g + h,

erit æquale trapeziis quatuor IK + LM + NO

+ PQ; & proinde $\frac{p x x}{d} + b x$, æquabitur toti

perambulatorio aa. Quæ æquatio dividendo om-

nes terminos per $\frac{p}{d}$ & extrahendo radicem ejus,

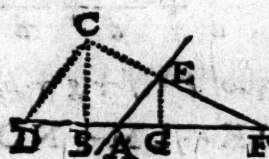
evadet x = $\frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. Latitu-

dine Perambulatorii sic inventa facile est ipsum describere.

PROB.

PROB. XX.

A dato puncto C rectam lineam CF ducere quæ cum aliis duabus positione datis rectis AE & AF triangulum data magnitudinis AEF comprehendat



AGE. CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, sitque $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$; & trianguli AEF area cc , & propter proportionales DF.

AF ($:: DC. AE$) $:: CB. EG$, hoc est $a + x. x :: b.$

$\frac{bx}{a+x}$ erit $\frac{bx}{a+x} = EG$. Hanc duc in $\frac{1}{2}AF$, &

emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF quæ proinde

aquat cc . Atque adeo æquatione ordinata est

$$xx = \frac{2ccx + 2cca}{b} \text{ seu } x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$$

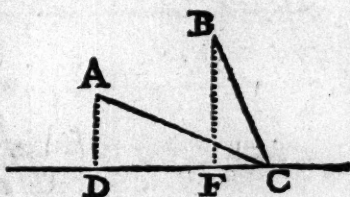
Nihil secus recta per datum punctum ducitur quæ triangulum vel trapezium quodvis in data ratione secabit.

PROB.

PROB. XXI.

*Punctum C in data recta linea DF determinare,
à quo ad alia duo positione data
puncta A & B ducta recta AC & BC datam habeant differentiam.* Vide Prop. 45.

A Datis punctis ad
datam rectam
demitte perpendiculares
AD & BF, & dic
 $AD = a$, $BF = b$, DF
 $= c$, $DC = x$, & erit



$AC = \sqrt{aa + xx}$, $FC = x - c$, & $BC =$

$\sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Sit jam data harum dif-
ferentia d , existente AC majori quam BC erit

$\sqrt{aa + xx} - d = \sqrt{bb + xx - 2cx + cc}$. Et

quadratis partibus $aa + xx + dd - 2d\sqrt{aa + xx}$

$= bb + xx - 2cx + cc$. Factaque reductione &

abbreviandi causa pro datis $aa + dd - bb - cc$

scripto $2ee$, emerget $ee + cx = d\sqrt{aa + xx}$.

Iterumque quadratis partibus $e^4 + 2ceex + ccxx$

$= d^4aa + ddxx$.

Et æquatione reducta $xx = \frac{2eecx + e^4 - aadd}{dd - cc}$,

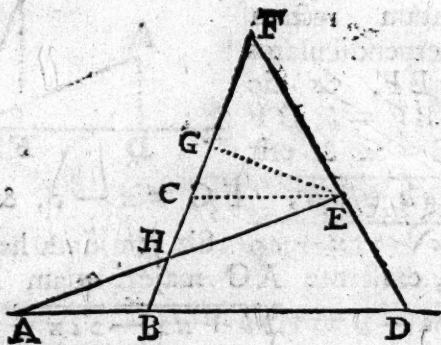
seu $x = \frac{eec + \sqrt{e^4dd - aadd + aaddcc}}{dd - cc}$.

Haud secus problema resolvitur si linearum AC
& BC summa vel quadratorum summa aut diffe-
rentia, vel proportio vel rectangulum vel angulus
ab ipsis comprehensus detur; vel etiam si vice
rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis
curva linea adhibeatur, modo calculus (in hoc ul-
timo præsertim casu) referatur ad lineam conjun-
gentem puncta A & B.

P R O B.

P R O B. XXII.

Datis positione tribus rectis AD , AE , BF , quartam DF ducere, cujus partes DE EF prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum.



A DBF demitte perpendicularem EG , ut & obliquam EC parallelam AD , & rectis tribus positione datis concurrentibus in A , B , & H , dic $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, & $HE = x$. Jam propter similia triangula ABH , ECH , est $AH. AB :: HE. EC = \frac{ax}{c}$, & $AH.$

$HB :: HE. CH = \frac{bx}{c}$. Adde HB , & fit CB

$= \frac{bx + bc}{c}$. Insuper propter similia triangula FEC ,

FDB , est $ED. CB :: EF. CF = \frac{ebx + ebc}{dc}$. De-

nique per 12 & 13. II. Elem. est $\frac{ECq - EFq}{2FC} + \frac{1}{2}FC$

$$+ \frac{1}{2} FC (= CG) = \frac{HEq - ECq}{2CH} - \frac{1}{2} CH, \text{ hoc est}$$

$$\frac{\frac{aaxx}{cc} - ee}{\frac{2ebx + 2ebc}{dc}} + \frac{ebx + ebc}{2dc} = \frac{xx - \frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c}. \text{ Sive}$$

$$\frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{ccx - aax - bbx}{b}$$

$$\text{Hic, abbreviandi causa, pro } \frac{cc - aa - bb}{b} - \frac{eb}{d},$$

$$\text{scribe } m; \text{ \& erit } \frac{aadxx - eedcc}{ebx + ebc} + \frac{ebc}{d} = mx,$$

ac terminis omnibus multiplicatis per $x + c$, fiet

$$\frac{aadxx - eedcc}{eb} + \frac{ebcx}{d} + \frac{ebcc}{d} = mxx + mcx.$$

$$\text{Iterum pro } \frac{aad}{eb} - m, \text{ scribe } p, \text{ pro } mc - \frac{ebc}{d} \text{ scribe}$$

$$2pq, \text{ \& pro } -\frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb} \text{ scribe } prr, \text{ \& evadet}$$

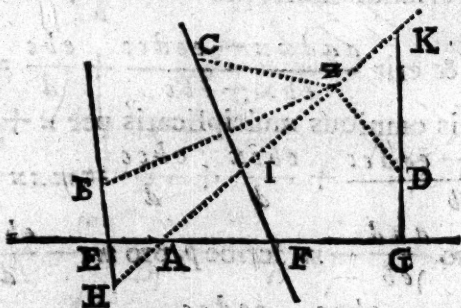
$$xx = 2qx + rr, \text{ \& } x = q + \sqrt{qq + rr}. \text{ Invento}$$

x sive HE, age EC parallelam AB, & Cape FC. BC $\therefore e, d$, & acta FED conditionibus quaestio- nis satisfaciet.

K PROB.

P R O B. XXIII.

Punctum Z determinare à quo ad quatuor positione datas rectas lineas FA , EB , FC , GD , si aliæ quatuor lineæ ZA , ZB , ZC , & ZD in datis angulis ducantur, duarum è ductis ZA & ZB rectangulum & aliarum duarum ZC & ZD summa detur.



E Lineis elige aliquam positione datam FA ut & positione non datam ZA quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur, & cæteras positione datas lineas producat donec his, si opus est etiam productis, occurrant, ut vides. Dictisque $EA = x$, & $AZ = y$, propter angulos trianguli AEH datos dabitur ratio AE ad AH quam pone p ad q , & erit $AH = \frac{qx}{p}$. Adde

AZ , fitque $ZH = y + \frac{qx}{p}$. Et inde cum propter datos angulos trianguli HZB detur ratio HZ ad BZ si ea ponatur n ad p habebitur $ZB = \frac{py + qx}{n}$.

Præter-

GEOMETRICARUM. 147

Præterea si data E F dicatur a , erit $AF = a - x$, indeque, si propter datos angulos trianguli AFI statuatur AF ad AI in ratione p ad r , evadet

$$AI = \frac{ra - rx}{p}. \text{ Hanc aufer ab AZ \& restabit}$$

$$IZ = y - \frac{ra - rx}{p}. \text{ Et propter datos angulos trianguli ICZ, si ponatur IZ ad ZC in ratione } m \text{ ad } p, \text{ evadet } ZC = \frac{py - ra + rx}{m}.$$

Ad eundem modum si ponatur EG = b , AG, AK :: $l:s$ & ZK. ZD :: $p:l$. obtinebitur

$$ZD = \frac{sb - sx - ly}{p}.$$

Jam ex statu quæstionis si duarum ZC & ZD summa $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p}$ ponatur æqualis dato alicui f ; & aliarum duarum rectangulum $\frac{pyy + qxy}{n}$ æquale gg , habebuntur duæ æquationes pro

$$\text{determinandis } x \text{ \& } y. \text{ Per posteriorem fit } x = \frac{ngg - pyy}{qy}.$$

& hunc ipsius x valorem scribendo pro eo in priori æquatione, evadet $\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpyy}{mqy}$

$$+ \frac{sb - ly}{p} - \frac{snngg - spyy}{pqy} = f. \text{ Et reducendo}$$

$$yy = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + ggms - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps}. \text{ Et}$$

$$\text{abbrevi. causa scripto } 2b \text{ pro } \frac{apqr - bmq + fmpq}{ppq - ppr - mlq + mps};$$

$$\text{\& } kk \text{ pro } \frac{ggms - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps} \text{ fiet } yy = 2by + kk$$

nique propter similia triangula CDE, FBC, est
CE. CD::CF. BF, five $x-b. a::x+b.$

$\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Unde $ax+ab=x-bx$
 $\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Cujus æquationis utra-
que parte quadrata, & prodeuntibus terminis in or-
dinem redactis, prodit $x^4 = \frac{2aa}{2bb}xx + \frac{2aabb}{b^4}$.

Et extracta radice sicut fit in æquationibus qua-
draticis, prodit $xx = aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}$.

Adeoq̃ue $x = \sqrt{aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}}$. CG
sic inventa dat CE vel CF, quæ determinando
punctum E vel F problemati satisfacit.

Idem aliter.

Sit CE = x, CD = a, & EF = b, eritque CF =
 $x+b$ & BF = $\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Et pro-
inde cum sit CE. CD::CF. BF, five $x.a::x+b.$

$\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$, erit $ax+ab =$
 $x\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Hujus æquationis par-
tibus quadratis, & terminis in ordinem redactis pro-
dibit $x^4 + 2bx^3 + \frac{bb}{-2aa}xx - 2aabx - aabb = 0$,
æquatio biquadratica, cujus radicis investigatio dif-
ficilior est quam in priori casu. Sic autem investi-
gari potest. Pone $x^4 + 2bx^3 + \frac{bb}{-2aa}xx - 2aabx$
 $+ a^4 = aabb + a^4$, & extracta utrobique radice
 $xx + bx - aa = \frac{1}{-} a\sqrt{aa + bb}$.

Ex his occasionem nactus sum tradendi *Regulam*
de electione terminorum ad ineundum calculum.

Scilicet cum duorum terminorum talis obvenit affinitas
sive similitudo relationis ad ceteros terminos quæstionis, ut

oporteret aequationes per omnia similes ex utrovis adhibitis produci, aut ambos si simul adhiberentur easdem in aequatione finali dimensiones & eandem omnino formam (signis forte + & — exceptis) habituros esse; (id quod facile prospicitur;) tunc neutrum adhibere convenit, sed eorum vice tertium quemvis eligere qui similem utrique relationem gerit, puta semisummam vel semidifferentiam, vel medium proportionale forsan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & sine compare relatum.

E

Sic in praecedente problemate cum viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri (quod patebit si ducas itidem EF in angulo BAH,) atque adeo nulla ratione suaderi possem cur ED potius quam BF, vel AE potius quam AF vel CE potius quam CF pro quaerenda quantitate adhiberentur; vice punctorum C & F unde haec ambiguitas proficiscitur, sumpsi (in solutione priori) intermedium G quod parem relationem ad utramque linearum AB & AD observat. Deinde ab hoc G non demissi perpendicularum ad AF pro quaerenda quantitate, quia potui eadem ratione demisisse ad AD. Et capropter in neutrum CB vel CD demissi, sed institui CG quaerendum esse quod nullum admittit compar; & sic aequationem biquadraticam obtinui sine terminis imparibus.

Potui etiam (animadverso quod punctum G jaceat in peripheria circuli centro A, radio EG descripti) demisisse GK perpendicularum in diagonalem AC, & quasivisse AK vel CK, (quippe quae similem etiam utrique AB & AD relationem gerunt;) atque ita in aequationem quadraticam $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}bb$ incidissem posito $AK = y$, $AC = e$, & $EG = b$. Et AK sic invento erigendum fuisset perpendicularum KG praefato circulo occurrens in G. per quod CF transiret.

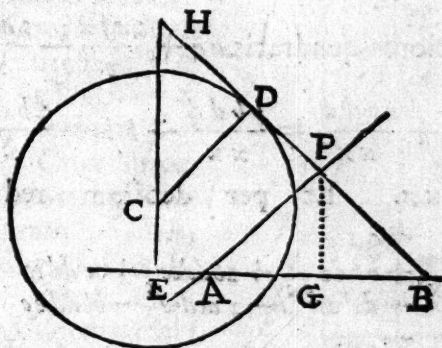
Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9. & 10. ubi trianguli latera germana BC & AC deter-

deter-

determinanda erant, quæsi potius semidifferentiam quam alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas è sequenti Problemate magis elucescet. *vigesimo octavo*

PROB. XXV.

Ad Circulum centro C radio C D descriptum ducere Tangentem D B, cujus pars P B inter rectas positione datas A P, A B sita sit data longitudinis.



A Centro C ad alterutram rectarum positione datarum puta A B demitte normalem CE, eamque produc donec Tangenti D B occurrat in H. Ad eandem A B demitte etiam normalem P G. & dictis $E A = a$, $E C = b$, $C D = c$, $B P = d$, & $P G = x$, propter similia triangu-
la P G B, C D H

erit $GB(\sqrt{dd-xx}). PB :: CD. CH = \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$.

Adde EC; & fiet $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{dd-xx}}$. Porro est

$P G. GB :: E H. E B = \frac{b}{x} \sqrt{dd-xx} + \frac{cd}{x}$. Ad-

hæc propter angulum P A G datum datur ratio

PG ad AG, qua posita e ad f erit $AG = \frac{fx}{e}$. Ad-

de EA & BG, & habebitur denuo $EB = a + \frac{fx}{e}$

$+ \sqrt{dd - xx}$. Est itaque $\frac{cd}{x} + \frac{b}{x} \sqrt{dd - xx} = a$

$+ \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$, & per transpositionem termi-

norum $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b-x}{x} \sqrt{dd - xx}$. Et parti-

bus æquationis quadratis $aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee}$

$- \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} = \frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx$

$+ dd - xx$. Et per debitam reductionem

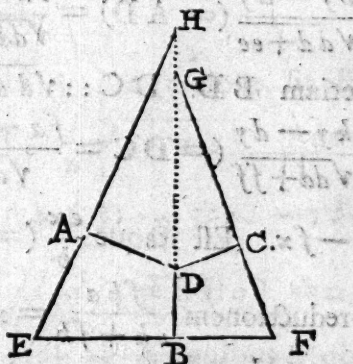
$$\begin{array}{r} + aae \\ x^4 + 2aefx^3 + bbee \\ - 2bee^2 - ddee^2x^2 - 2acdee^2x - bbddee \\ - 2cdef \\ \hline ee + ff \end{array} = 0.$$

PROB.

PROB. XXVI.

Invenire punctum D à quo tres rectæ DA, DB, DC ad totidem alias positione datas rectas AE, BF, CF perpendiculariter demissa; datam inter se rationem obtineat.

E Rectis positione datis producat una puta BF, ut & ejus perpendicularis BD donec reliquis AE & CF occurrant; BF quidem in E & F; BD autem in H & G. Jam sit $EB = x$ & $EF = a$; eritque $BF = a - x$. Cum autem propter datam positionem rectarum EF, EA, & FC, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum EBH & FBG dentur; sit



EB ad BH ut d ad e ; & erit $BH = \frac{ex}{d}$, & EH

$(= \sqrt{EBq + BHq}) = \sqrt{xx + \frac{eeex}{dd}}$, hoc est =

$\frac{x}{d} \sqrt{dd + ee}$. Sit etiam BF ad BG ut d ad f ; &

erit $BG = \frac{fa - fx}{d}$ & FG $(= \sqrt{BFq + BGq})$

$= \sqrt{aa - 2ax + xx + \frac{ffaa - 2ffax + ffx}{dd}}$,

hoc est $= \frac{a - x}{d} \sqrt{dd + ff}$. Præterea dicatur $BD = y$,

&

& erit $HD = \frac{ex}{d} - y$, & $GD = \frac{fa - fx}{d} - y$, adeoque cum sit $AD.HD (:: EB.EH) :: d.\sqrt{dd+ee}$, & $DC.GD (:: BF.FG) :: d.\sqrt{dd+ff}$, erit $AD = \frac{ex - dy}{\sqrt{dd+ee}}$, & $DC = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{dd+ff}}$.

Denique ob datas rationes linearum BD, AD, DC , sit $BD.AD :: \sqrt{dd+ee}. h - d$, & erit $\frac{hy - dy}{\sqrt{dd+ee}} (= AD) = \frac{ex - dy}{\sqrt{dd+ee}}$, five $hy = ex$. Sit etiam $BD.DC :: \sqrt{dd+ff}. k - d$ & erit $\frac{ky - dy}{\sqrt{dd+ff}} (= DC) = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{dd+ff}}$, five $ky = fa$

$-fx$. Est itaque $\frac{ex}{h} (= y) = \frac{fa - fx}{k}$, & per reductionem $\frac{fha}{ek + fh} = x$. Quare cape $EB.EF :: b.\frac{ek}{f} + h$, dein $BD.EB :: e.h$, & habebitur punctum quaesitum D .

= sic obi. **P R O B. XXVII**

Invenire punctum D, à quo tres rectae DA, DB, DC ad data tria puncta A, B, C, ductae, datam inter se rationem obtineant.

EDatis tribus punctis junge duo quævis puta A & C ; & à tertio B ad lineam conjungentem AC demitte perpendicularum BE , ut & perpendicularum DF à puncto quaesito D ductisque $AE = a$, $AC = b$, $EB = c$, $AF = x$, & $FD = y$, erit

ADq

$ADq = xx + yy$. $FC = b - x$. $CDq (= FCq + FDq) = bb - 2bx$

$+ xx + yy$. $EF = x - a$, $acBDq (= EFq$

$+ EB + FD$ quad.)

$= xx - 2ax + aa$

$+ cc + 2cy + yy$. Jam

cum sit AD ad CD

in data ratione, sit ista

ratio d ad e ; & erit

$CD = \frac{e}{d} \sqrt{xx + yy}$.

Cum etiam sit AD ad BD in data ratione, sit ista

ratio d ad f , & erit $BD = \frac{f}{d} \sqrt{xx + yy}$. Adeo-

que est $\frac{eexx + eeyy}{dd} (= CDq) = bb - 2bx$

$+ xx + yy$, & $\frac{ffxx + ffyy}{dd} (= BDq) = xx$

$- 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. In quibus si, ab-

breviandi causa, pro $\frac{dd - ee}{d}$ scribatur p , & q pro

$\frac{dd - ff}{d}$, emerget $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$,

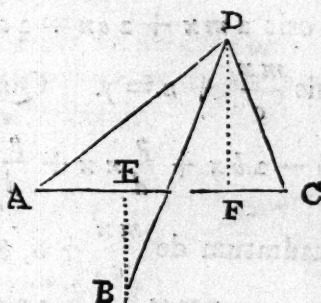
& $aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0$.

Per priorem est $\frac{2bqx - bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$.

Quare in posteriori pro $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ scribe

$\frac{2bqx - bbq}{p}$, & oriatur $\frac{2bqx - bbq}{p} + aa + cc$

$- 2ax + 2cy = 0$. Iterum, abbreviandi causa, scribe



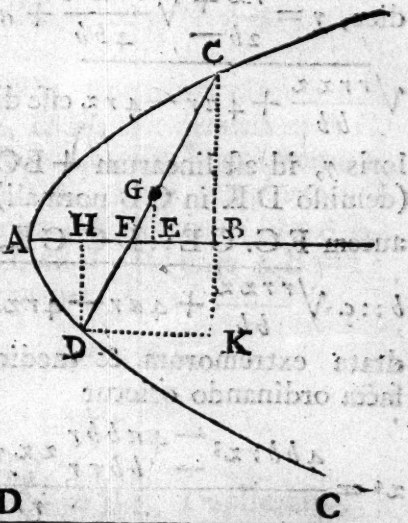
scribe m pro $a - \frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p} - aa - cc$,
 & erit $2mx + 2cn = 2cy$; terminisque per $2c$ di-
 visis $\frac{mx}{c} + n = y$. Quamobrem in æquatione
 $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, pro yy scribe
 quadratum de $\frac{mx}{c} + n$, & habebitur $bb - 2bx +$
 $\frac{p}{d}xx + \frac{pmm}{dcc}xx + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pnn}{d} = 0$. Ubi
 denuo si, abbreviandi causa, $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d} +$
 $\frac{pmm}{dcc}$, $\frac{sb}{r}$ pro $b - \frac{pmn}{dc}$, & $\frac{tbb}{r}$ pro $bb + \frac{pnn}{d}$,
 habebitur $xx = 2sx - tb$. Et extracta radice
 $x = s \pm \sqrt{ss - tb}$. Invento x æquatio $\frac{mx}{c} + n = y$,
 dabit y ; & ex datis x & y , hoc est AF & FD
 determinatur punctum quaesitum D.

P R O B.

P R O B. XXVIII.

Rectam DC data longitudinis in datam Conicam sectionem DAC sic inscribere ut ea per punctum G positione datum transeat.

SIT AF axis Curvæ, & à punctis D, G & C ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam ad determinandam positionem rectæ DC puncti D aut C inventio proponi potest; sed cum hæc sint germana, & adeo paria ut ad alterutrum determinandum operatio similis evasura esset, sive quærerem CG, CB, aut



AB; sive comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto prospicio quod utrumque D & C similiter respectet, & una determinet. Et hujusmodi video esse punctum F.

Jam sit $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $EF = z$; & præterea cum relatio inter AB & BC habeatur in æquatione quam suppono pro Conica sectione determinanda datam esse, sit $AB = x$, & $BC = y$, & erit $FB = x - a + z$. Et propter GE. EF ::

CB. FB erit iterum $FB = \frac{yz}{b}$. Ergo $x - a + z$

$$= \frac{yz}{b}$$

His

His ita preparatis tolle x per æquationem quæ curvam designat. Quemadmodum si Curva sit Parabola per æquationem $rx = yy$ designata, scribe $\frac{yy}{r}$

pro x ; & orietur $\frac{yy}{r} - a + z = \frac{yz}{b}$. Et extracta ra-

dice, $y = \frac{rz}{2b} + \sqrt{\frac{rrz}{4bb}} + ar - rz$. Unde patet

$\sqrt{\frac{rrz}{bb}} + 4ar - 4rz$ esse differentiam gemini va-

loris y , id est linearum $+BC$ & $-DH$, adeoque (demisso DK in CB normali) valere CK . Est

autem $FG. GE :: DC. CK$, hoc est $\sqrt{bb + z^2}$.

$b :: c. \sqrt{\frac{rrz}{bb}} + 4ar - 4rz$. Ducendoque qua-

drata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando orietur

$$z^4 = \frac{4bbrrz^3 - 4abbrz^2 + 4b^4rz - 4ab^4r}{rr}$$

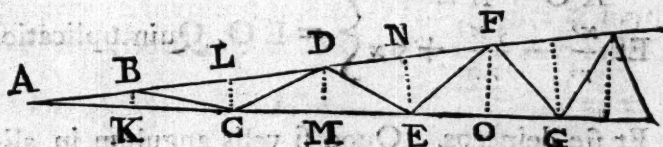
æquatio quatuor tantum dimensionum, quæ ad octo dimensiones ascendisset si quævissem CG vel CB aut AB .

PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

IN angulo quovis FAG inscribe lineas $AB, BC, CD, DE, &c.$ Eiusdem cujusvis longitudinis, & erunt triangula $ABC, BCD, CDE, DEF, &c.$ Isoscelia; adeoque per 32. I. Elem. erit ang. $CBD = \text{ang. } A + ACB = 2 \text{ ang. } A$, &

& ang. DCE = ang. A + ADC = 3 ang. A &
ang. EDF = A + AED = 4 ang. A, & ang.
FEG = 5 ang. A, & sic deinceps. Positis jam



AB, BC, CD, &c. radiis æqualium circularum,
perpendiculara BK, CL, DM, &c. demissa in AC,
BD, CE, &c. erunt sinus istorum angularum, &
AK, BL, CM, DN, &c. sinus complemento-
rum ad rectum. Vel posita AB diametro illæ AK,
BL, CM, &c. erunt chordæ. Sit ergo AB = 2r
& AK = x, dein sic operare.

$$AB.AK::AC.AL.$$

$$2r . x :: 2x . \frac{xx}{r}.$$

$$AL - AB \}$$

$$\text{Et } \frac{xx}{r} - 2r \} = BL, \text{ Duplicatio.}$$

$$AB.AK::AD.(2AL - AB).AM.$$

$$2r . x :: \frac{2xx}{r} - 2r . \frac{x^3}{rr} - x.$$

$$AM - AC \}$$

$$\text{Et } \frac{x^3}{rr} - 3x \} = CM, \text{ Triplicatio.}$$

$$AB.AK::AE.(2AM - AC).AN.$$

$$2r . x :: \frac{2x^3}{rr} - 4x . \frac{x^4}{r^3} + \frac{2xx}{r}.$$

$$AN - AD \}$$

$$\text{Et } \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \} = DN, \text{ Quadruplicatio.}$$

$$AB.AK.::$$

AB:AK::AF(2AN-AD),AO.

$$2r \cdot x :: \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r} + 2r \cdot \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x;$$

AO-AE

$$\text{Et } \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x \} = EO, \text{ Quintuplicatio.}$$

Et sic deinceps. Quod si velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. Et habebis $xx - 2rr = qr$ ad bisectionem, $x^3 - 3rrx = qrr$ ad trisectionem, $x^4 - 4rrxx + 2r^4 = qr^3$ ad quadrisectionem, $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x = qr^4$ ad quinquisectionem &c.

P R O B. XXX.

Cometa in linea recta BD uniformiter progredientis positionem cursus ex tribus observationibus determinare.



SIT A oculus spectatoris, B locus Cometæ in prima observatione, C in secunda ac D in tertia; quaerenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex observationibus itaq; dantur anguli BAC BAD; adeoq; si BH ducatur ad AB normalis

lis & occurrens AC & AD in E & F, ex assumpto utcumque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum respectu radii AB. Sit ergo AB = a, BE = b, & BF = c. Porro ex datis observationum intervallis dabitur ratio BC

ad

ad BD quæ si ponatur b ad e , & agatur DG parallela AC, cum sit BE ad BG in eadem ratione, & BE dicta fuerit b erit $BG = e$, adeoque $GF = e - c$. Adhæc si demittatur DH normalis ad BG, propter triangu-
la ABF & DHF similia & simili-
ter secta lineis AE ac DG, erit FE. AB::FG.

HD, hoc est $c - b$. a::e - c. $\frac{ae - ac}{c - b} = HD$.

Erit etiam FE. FB::FG. FH, hoc est $c - b$. c
::e - c. $\frac{ce - cb}{c - b} = FH$; cui adde BF five c & fit

BH = $\frac{ce - cb}{c - b}$. Quare est $\frac{ce - cb}{c - b}$ ad $\frac{ae - ac}{c - b}$,

(five $ce - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ce - cb}{e - c}$ ad a) ut

BH ad HD; hoc est ut tangens anguli HDB five
ABK ad radium. Quare cum a supponatur esse
radius, erit $\frac{ce - cb}{e - c}$ tangens anguli ABK, adeo-

que facta resolutione erit ut $e - c$ ad $e - b$ (five
GF ad GE) ita c (five tangens anguli BAF)
ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque ut tempus inter primam & secun-
dam observationem, ad tempus inter primam ac
tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam
proportionalem. Dein ut differentia inter illam
quartam proportionalem & tangentem anguli
BAF, ad differentiam inter eandem quartam pro-
portionalem & tangentem anguli BAE, ita tan-
gens anguli BAF, ad tangentem anguli ABK.

E.

PROB.

erit $f\sqrt{zz + 2zx + rr} = z\sqrt{aa - 2ax + rr}$, & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem,

$$zz = \frac{2ffxz + ffr}{aa - 2ax + rr - ff} \quad \text{Denique pro dato}$$

$\frac{ff}{a}$ scribe p , & q pro dato $a + \frac{rr}{a} - p$, & erit

$$zz = \frac{2pxz + prr}{q - 2x} \quad \text{ac } z = \frac{px + \sqrt{ppxx - 2prrx + pqr}}{q - 2x}$$

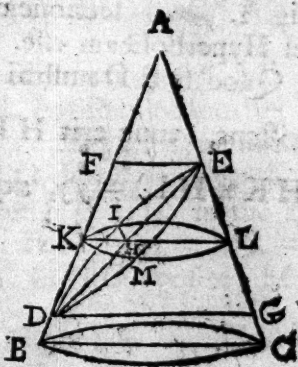
Inventum est itaque z ; hoc est longitudo CD , adeoque punctum quæsitum D quo refractus BD concurret cum axe. $Q. E. F.$

Posui hic incidentes radios divergentes esse, & in Medium densius incidere; sed mutatis mutandis Problema perinde resolvitur ubi convergunt, vel incidunt è densiori Medio in rarius.

P R O B. XXXII.

Si Conus plano quolibet secetur, invenire figuram sectionis.

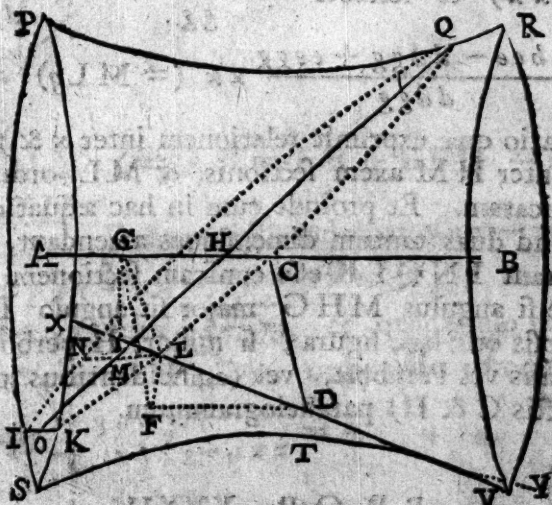
SIT ABC conus circulari basi BC insistens; IEM ejus sectio quæsitæ; $KILM$ alia quælibet sectio parallela basi, & occurrens priori sectioni in HI ; & ABC tertia sectio perpendiculariter bisecans priores duas in EH & KL , & conum in triangulo ABC . Et producto EH donec occurrat ipsi AK



in D , actisque EF ac DG parallelis KL & occurrentibus AB & AC in F ac G , dic $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$.

PROB. XXXIII.

Si recta XY circa axem AB , ad distantiam CD , in data inclinatione ad planum DCB convolvatur, & solidum $PQRUTS$ ista convolutione generatum secetur plano quolibet $INQLK$; invenire figuram Sectionis.



Est BHQ vel GHO inclinatio axis AB ad planum sectionis; & L quilibet concursus rectæ XY cum plano illo. Age DF parallelam AB , & ad AB , DF & HO demitte perpendiculares LG , LF , LM , ac junge FG & MG . Distisque $CD = a$, $CH = b$, $HM = x$, & $ML = y$; & propter datum angulum GHO posito MH .

$HG :: d. e :$ erit $\frac{ex}{d} = GH$, & $b + \frac{ex}{d}$ GC vel FD . Adhæc propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum $GCDF$)
L 3 posito

posito FD. FL::g. h, erit $\frac{hb}{g} + \frac{hex}{dg} = FL$, cu-
 jus quadrato adde FGq, (DCq seu aa) & emerget
 $GLq = aa + \frac{hbhb}{gg} + \frac{2hbhex}{dgg} + \frac{bbeexx}{ddgg}$.
 Hinc aufer MGq (HMq — HGq seu xx —
 $\frac{ee}{dd}xx$) & restabit $\frac{aagg + hbhb}{gg} + \frac{2hbhex}{dgg}xx$
 $+ \frac{bbeexx - ddgg + eegg}{ddgg}xx (= MLq) = yy:$

æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc
 est inter HM axem sectionis, & ML ordinatim
 applicatam. Et proinde cum in hac æquatione x
 & y ad duas tantum dimensiones ascendant, patet
 figuram INQLK esse conicam sectionem. Ut-
 pote si angulus MHG major sit angulo LDF,
 Ellipsis erit hæc figura; si minor, Hyperbola; si
 æqualis vel Parabola, vel (coincidentibus insuper
 punctis C & H) parallelogrammum.

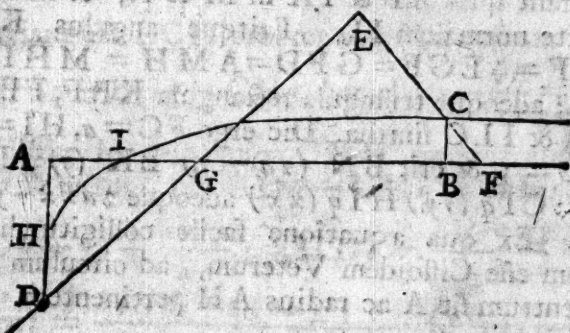
P R O B. XXXIV.

Si ad AF erigatur perpendicularum AD data lon-
 gitudinis, & norma DEF crus unum ED
 continuo transeat per punctum D dum alterum
 crus EF aequale AD dilabatur super AF;
 invenire curvam HIC quam crus EF medio
 ejus puncto C describit.

SIT EC vel CF = a, perpendicularum CB = y,
 AB = x, & propter similia triangula FBC,
 FEG, erit BF ($\sqrt{aa - yy}$) BC + CF (y + a)::
 EF



EF (2a.) EG + GF (AG + GF) seu AF. Quare



$$\frac{2ay + 2aa}{\sqrt{aa - yy}} (= AF = AB + BF) = x +$$

$\sqrt{aa - yy}$. Jam multiplicando per $\sqrt{aa - yy}$ fit

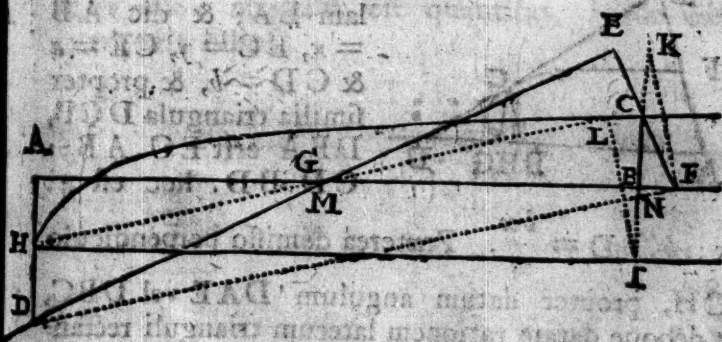
$$2ay + 2aa = aa - yy + x\sqrt{aa - yy}, \text{ seu } 2ay$$

$$+ aa + yy = x\sqrt{aa - yy}, \text{ \& quadrando partes}$$

divisas per $\sqrt{a + y}$, ac ordinando prodit y^3

$$+ 3ayy + 3aa + a^3 = 0.$$

Idem aliter.

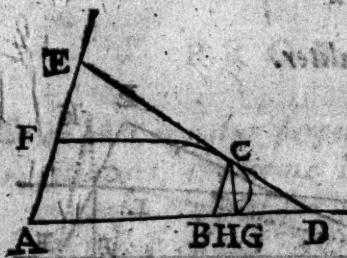


In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CE,

& age KP , HI , HC , ac DP ; quarum HC ac DF occurrant ipsis AF & IK in M & N , & in HC demitte normalem IL . Eritque angulus $K = \frac{1}{2}BCF = \frac{1}{2}EGF = GFD = AMH = MHI = CIL$; adeoque triangula rectangula KBF , FBN , HLI & ILC similia. Dic ergo $FC = a$, $HI = x$, & $IC = y$; & erit $BN (2a - y)$ $BK (y) :: LC$. $LH :: CI q (yy)$ $HI q (xx)$ adeoque $2axx - yxx = y^3$. Ex qua æquatione facile colligitur hanc curvam esse Cissoïdem Veterum, ad circulum cuius centrum sit A ac radius AH pertinentem.

+ x = / (P R O B. XXXV.

Si data longitudinis recta ED angulum datum EAD subtendens ita moveatur ut termini ejus D & E anguli istius latera AD & AE perpetim contingant; proponatur Curvam ECG determinare quoniam punctum quodvis C in recta ista ED datum describit.



A Dato puncto C age CB parallelam EA ; & dic $AB = x$, $BC = y$, $CE = a$ & $CD = b$, & propter similia triangula DCB , DEA erit $EC.AB :: CD.BD$. hoc est a .

$x :: b.BD = \frac{bx}{a}$. Præterea demisso perpendiculo

CH , propter datum angulum DAE vel DBC , adeoque datam rationem laterum trianguli rectanguli BCH fit $a.e :: BC.BH$, & erit $BH = \frac{ey}{a}$.

Aufer

Aufer hanc de BD & restabit $HD = \frac{bx - ey}{a}$. Jam in triangulo BCH propter angulum rectum BHC est $BCq - BHq = CHq$, hoc est $yy - \frac{eey}{aa} = CHq$.

Similiter in triangulo CDH propter angulum CHD rectum, est $CDq - CHq = HDq$, hoc est $bb - yy + \frac{eey}{aa} (= HDq = \frac{bx - ey}{a}$ qua-

drato) $= \frac{bbx - 2bexy + eeyy}{aa}$. Et per re-

ductionem $yy = \frac{2be}{aa}xy + \frac{aabb - bbbx}{aa}$. Ubi cum incognitae quantitates sint duarum tantum dimensionum, patet curvam esse Conicam sectionem. Præterea extracta radice fit

$$y = \frac{bex + b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}. \text{ Ubi in per-}$$

mino radicali coefficientis ipsius xx est $ee - aa$. Atqui erat $a.e :: BC.BH$; & BC necessario major est linea quam BH, nempe Hypotenusa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quam e , & $ee - aa$ negativa est quantitas, atque adeo curva erit Ellipsis.

PROB. XXXVI.

Si norma EBD ita moveatur ut ejus crus unum EB continuo subtendat angulum rectum EAB , dum terminus alterius cruris BD describat curvam aliquam lineam FDG ; invenire lineam istam FDG quam punctum D describit.

A Puncto D ad latus AC demitte perpendicularum DC ; & dictis $AC = x$, & $DC = y$, atque $EB = a$ & $BD = b$; in triangulo BDC propter angulum rectum ad C , est $BC^2 = BD^2 - DC^2 = b^2 - yy$. Ergo $BC = \sqrt{b^2 - yy}$ &

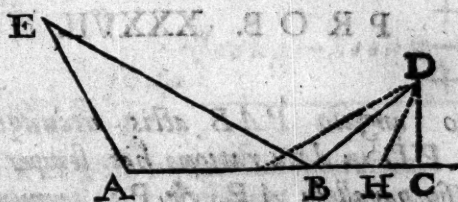
$AB = x - \sqrt{b^2 - yy}$. Præterea propter similia triangula BEA , DBC , est $BD : DC :: EB : AB$. hoc est $b : y ::$

$a : x - \sqrt{b^2 - yy}$. Quare $bx - b\sqrt{b^2 - yy} = ay$, five $bx - ay = b\sqrt{b^2 - yy}$. Et partibus quadratis ac debite reductis $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. Et extracta radice $y =$

$\frac{abx \pm b\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$. Unde patet iterum

Curvam esse Ellipsin.

Hæc ita se habent ubi anguli EBD & EAB recti sunt: Sed si anguli isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales, sic procedendum



dendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad
 AC ut ante, & agatur DH constituens angulum
 DHA æqualem angulo HAE puta obtusum, di-
 ctisque $EB = a$, $BD = b$, $AH = x$, & $HD = y$,
 propter similia triangula EAB, BHD, erit BD ,
 $DH :: EB . AB$. hoc est $b . y :: a . AB = \frac{ay}{b}$.

Aufer hanc de AH, & restabit $BH = x - \frac{ay}{b}$.

Præterea in triangulo DHC propter omnes an-
 gulos datos, adeoque datam rationem laterum,
 assume DH ad HC in ratione quavis data, puta

b ad e , & cum DH sit y , erit $HC = \frac{ey}{b}$, & $HB \times HC$

$= \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem.

in triangulo BHD est $BD^2 = BH^2 + DH^2 +$

$2 BH \times HC$, hoc est $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$

$+ yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et extracta radice

$x = \frac{ay - ey + \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Ubi cum

b sit major e hoc est $ee - bb$ negativa quantitas,
 patet iterum curvam esse Ellipsin.

PROB.

$$\text{tracta radice } y = \frac{fx + \sqrt{eeaa - 2eeax - ddxx + ff}}{d}$$

Ubi cum x & y in æquatione penultima non nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti D erit Conica sectio, eaque Hyperbola Parabola vel Ellipsis prout $ee - dd + ff$, (coefficientens ipsius xx in æquatione posteriori,) sit majus, æquale, vel minus nihil.

P R O B. XXXVIII.

Rectis duabus VE & VC positione datis, & ab alia recta PE circa polum positione datum P vertente sectis utcumque in C & E; si recta intercepta CE dividatur in partes CD, DE rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti D.

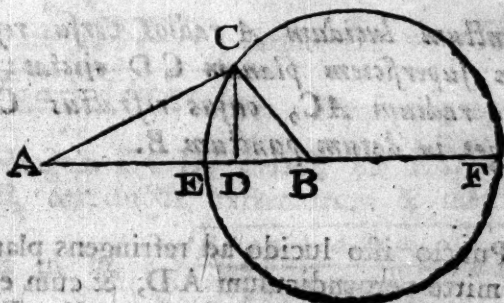
AGE VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VG in A & B. Dic VP = a , VA = x , & AD = y , & cum detur ratio CD ad DE, vel converse ratio CD ad CE, hoc est ratio DA ad

EB, sit ista ratio d ad e , & erit EB = $\frac{ey}{d}$. Præterea cum detur angulus EVB, adeoque ratio EB

ad VB, sit ista ratio e ad f ; & erit VB = $\frac{fy}{d}$.

Denique propter similia triangula CEB, CDA, CPV,

$AC = \sqrt{xx + yy}$. $BD = a - x$ & $BC (= \sqrt{BDq + DCq})$
 $= \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Jam cum detur ra-



tio AC ad BC, fit ista d ad e ; & extremis
 & mediis in se ductis, erit $e\sqrt{xx + yy} =$
 $d\sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Et per reductionem

$$\sqrt{\frac{ddaa - 2ddax}{ee - dd}} - xx = y. \text{ Ubi cum } xx \text{ fit}$$

negativum, & sola unitate affectum; atque etiam
 angulus ADC rectus, patet curvam in qua pun-
 ctum C locatur esse circulum. Nempe in recta
 AB cape puncta E & F ita ut sint $d.e::AE$.
 $BE::AF.BF$, & erit EF circuli hujus diameter.

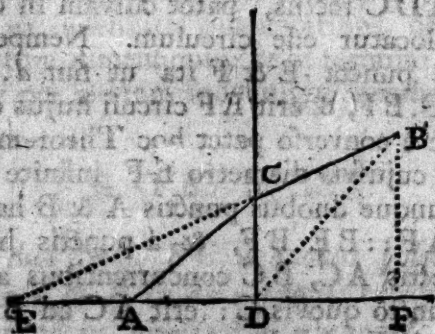
Et hinc è converso patet hoc Theorema, quod
 in circuli cujusvis diametro EF infinite producta
 datis utcumque duobus punctis A & B hac lege ut
 fit $AE.AF::BE.BF$, & á punctis hisce actis
 duabus rectis AC, BC concurrentibus ad circulum
 in puncto quovis C: erit AC ad BC in da-
 ta ratione AE ad BE.

PROB.

PROB. XL.

Si punctum lucidum *A* radios versus refringentem superficiem planam *CD* ejiciat; invenire radium *AC*, cujus refractus *CB* impinget in datum punctum *B*.

A Puncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendicularum *AD*, & cum eo utrinque producto concurrat refractus radius *BC* in *E*, & perpendicularum à puncto *B* demissum in *F*, & agatur *BD*; dictisque $AD = a$, $DB = b$, $BF = c$, $DC = x$, statue rationem sinuum incidentiae & refractionis, hoc est sinuum angulorum *CAD*, *CED* esse a ad c , & cum *EC* & *AC* (ut notum est) sit in eadem ratione, & *AC* sit $\sqrt{aa + xx}$



erit

erit $EC = \frac{d}{e} \sqrt{aa + xx}$. Præterea est ED

$$(\sqrt{ECq - CDq}) = \sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx},$$

& $DF = \sqrt{bb - cc}$, atque $EF = \sqrt{bb - cc}$

+ $\sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx}$. Denique propter si-

milis triangula ECD , EBF , est $ED.DC ::$

$EF.FB$, & ductis extremorum & mediorum

valoribus in se, $\sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx} =$

$$x \sqrt{bb - cc} + x \sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx}, \text{ five}$$

$$\sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx} = x \sqrt{bb - cc}. \text{ Et}$$

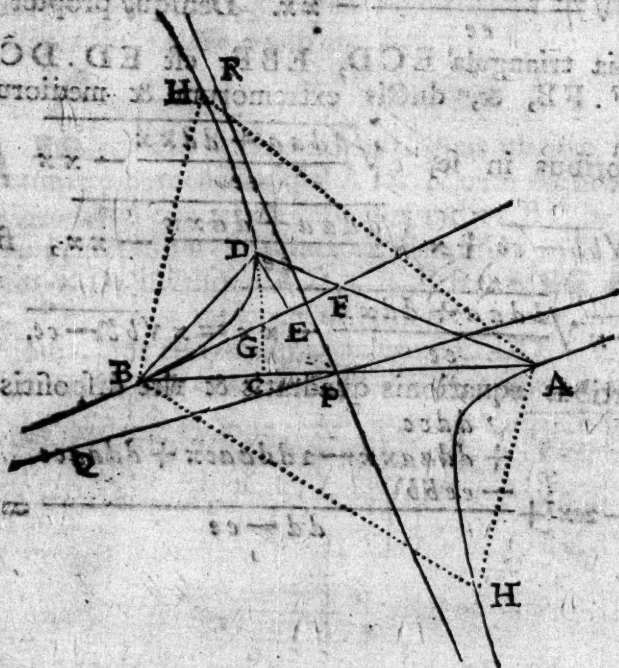
partibus æquationis quadratis & rite dispositis

$$\frac{ddcc + ddaaxx - 2ddaax + ddaacc}{dd - ee} = 0$$

PROB

P R O B. XLI.

Invenire locum verticis trianguli D, cujus basis AB datur, & anguli ad basem DAB, DBA datam habent differentiam.



UBI angulus ad Verticem, five (quod perinde est) ubi summa angulorum ad basem datur, docuit Euclides locum verticis esse circumferentiam circuli; proposui III. 29. Euclid. nus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad basem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, sitque ABF eorum data differentia, recta BF occurrente AD in F. Insuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB

GEOMETRICARUM. 179

AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictisque
 $AB = a$, $AG = x$, & $CD = y$, erit $BC = a - x$.
 Jam in triangulo BCG cum dentur omnes anguli
 dabitur ratio laterum BC & GC; fit ista d ad a , &
 erit $CG = \frac{aa - ax}{d}$. Aufer hanc de DC five y

& restabit $DG = \frac{dy - aa + ax}{d}$. Præterea prop-

ter similia triangula BGC, DGE est $BG : BC ::$
 $DG : DE$. Est autem in triangulo BGC, $a : d ::$
 $CG : BC$. Adeoque $aa : dd :: CGq : BCq$, & com-
 ponendo $aa + dd : dd :: BGq : BCq$. Et extractis
 radicibus $\sqrt{aa + dd} : d :: BG : BC :: DG : DE$.

Ergo $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Adhæc cum angulus

ABF sit differentia angulorum BAD & ABD,
 adeoque anguli BAD & FBD æquantur, similia
 erunt triangula rectangula CAD & EBD, & pro-
 inde latera proportionalia DA : DC :: DB : DE.

Sed est $DC = y$. $DA (= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx + yy}$.

$DB (= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$,

& supra erat $DE = \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$. Quare est

$\sqrt{xx + yy} : y :: \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} : \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa + dd}}$.

Et extremorum & mediorum quadratis in se ductis

$aa yy - 2ax yy + xx yy + y^4 = \frac{dd xx yy + dd y^4}{aa + dd}$

$- 2aadxx - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4 xx$

$+ a^4 yy - 2a^3 x^3 - 2a^3 x yy + aax^4 + aaxx yy$

$\frac{aa + dd}{aa + dd}$

M 2

Duc

Duc omnes terminos in $aa + dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur

$$x^4 + \frac{2d}{a}x^3 + aa^2x^2 + \frac{2dd}{a}xy - y^4 = 0.$$

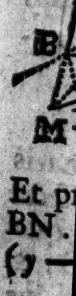
Divide hanc aequationem per $xx - ax + yy$, & orietur $xx + \frac{2d}{a}x - dy = 0$. Dux itaque pro-

dierunt aequationes in solutione hujus Problematis. Prior $xx - ax + yy = 0$ est ad circulum, locum nempe puncti D ubi angulus FBD sumitur ad alias partes rectae BF quam in figura describitur, existente angulo ABF summa angulorum DAB DBA ad basem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Posterior $xx + \frac{2d}{a}x - dy = 0$ est ad

Hyperbolam, locum puncti D ubi angulus FBD situm obtinet à recta BF quem in Figura descripsimus: hoc est ita ut angulus ABF sit differentia angulorum DAB, DBA ad basem. Hyperbolae autem hac est determinatio. Biseca AB in P. Age PQ constituentem angulum BPQ aequalem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Asymptoti hujus Hyperbolae, & B punctum per quod Hyperbola transibit.

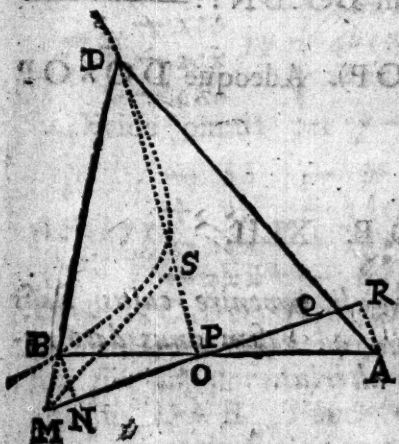
Et hinc prodit tale Theorema. Hyperbolae rectangulae diametro quavis AB ducta, & à terminis ejus ad Hyperbolae puncta duo quavis D & H ductis rectis AD, BD, AH, BH, haec rectae angulos DAH, DBH ad terminos diametri constituent aequales.

Idem



.OIA. (2-3)

Et propter similia triangula BNM, DOM, erit
 $BN : DO :: MN : MO$. Et dividendo, $DO - BN$
 $(y - b) : DO (y) :: MO - MN (ON \text{ five}$
 $M_3 \quad c - x$



$c - x$). MO . Quare $MO = \frac{cy - xy}{y - b}$. Simi-

liter ex altera parte propter similia triangula ARQ , DOQ , erit $AR \cdot DO :: RQ \cdot QO$: & compo-
nendo $DO + AR (y + b) \cdot DO (y) :: QO$
 $+ RQ (OR \text{ five } c + x) \cdot QO$. Quare QO
 $= \frac{cy + xy}{y + b}$. Denique propter aequales angulos

DMQ , DQM aquantur MO & QO , hoc est
 $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$. Divide omnia per y , & mul-

tiplica per denominatores, & orietur $cy + cb - xy$
 $- xb = cy - cb + xy - xb$, five $cb = xy$, notifi-
sima aequatio ad Hyperbolam.

Quin etiam locus puncti D sine calculo Alge-
braico prodire potuit. Est enim ex superioribus
 $DO - BN \cdot ON :: DO \cdot MO (QO) :: DO$
 $+ AR \cdot OR$. Hoc est $DO - BN \cdot DO + BN$
 $:: ON \cdot OR$, & mixtim $DO \cdot BN :: \frac{ON + OR}{2}$

$(NP) \cdot \frac{OR - ON}{2} (OP)$. Adeoque $DO \times OP$
 $= BN \times NP$.

PROB. XLII.

*Locum verticis trianguli invenire cujus Basis
datur, & angularum ad basem unus dato an-
gulo differt à duplo alterius.*

IN Schemate novissimo superioris Problematis
sit ABD triangulum istud, AB basis bisecta
in P , APQ vel BPM triens anguli dati, quo
angulus DBA excedit duplum anguli DAB : &
angulus

GEOMETRICARUM. 181

angulus DMQ erit duplus anguli DQM . Ad MQ demitte perpendiculara AR , BN , DO ; & angulum DMQ bifeca recta MS occurrente DO in S ; & erunt triangula DOQ , SOM similia; adeoque $OQ \cdot OM :: OD \cdot OS$, & dividendo $OQ - OM \cdot OM :: SD \cdot OS ::$ (per 3. VI. Elem.) $DM \cdot OM$. Quare (per 9. V. Elem.) $OQ - OM = DM$. Dictis jam $PO = x$, $OD = y$, AR vel $BN = b$, & PR vel $PN = c$, erit ut in superiori

$$\text{Problemate } OM = \frac{cy - xy}{y - b}, \text{ \& } OQ = \frac{cy + xy}{y + b},$$

$$\text{adeoque } OQ - OM = \frac{-2bcy + 2xyy}{yy - bb}. \text{ Pone jam}$$

$$DOq + OMq = DMq, \text{ hoc est } yy + \frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb} yy$$

$$= \frac{4bbcc - 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bb yy + b^4} yy. \text{ Et per debi-}$$

tam reductionem orietur tandem

$$y^4 * \begin{array}{r} + cc \\ - 2bb \\ - 2cx \\ - 3xx \end{array} yy + \begin{array}{r} + 2bxx \\ + 4bcxy \\ + 2bcc \\ + bbxx \end{array} - \begin{array}{r} + b^4 \\ - 3bbcc \\ - 2bbcx \\ + bbxx \end{array} = 0.$$

Divide omnia per $y - b$, & evadet

$$y^3 + byy + \begin{array}{r} - bb \\ - 2cx \\ - 3xx \end{array} y + \begin{array}{r} - b^3 \\ + 3bcc \\ + 2bcx \\ - bxx \end{array} = 0. \text{ Quare punctum}$$

D est ad Curvam trium dimensionum; quæ tamen evadit Hyperbola ubi angulus BPM statuitur nullus, sive angulorum ad basem unus DBA duplus alterius DAB . Tunc enim BN , sive b evanescente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$.

Ex hujus autem æquationis constructione tale elicitur Theorema. Si centro C , Asymptotis CS , CT , angulum SCT 120 graduum continentibus describatur Hyperbola quævis DV , cujus semi-

$c - x$). MO . Quare $MO = \frac{cy - xy}{y - b}$. Simi-

liter ex altera parte propter similia triangula ARQ , DOQ , erit $AR \cdot DO :: RQ \cdot QO$: & compo-
nendo $DO + AR (y + b) \cdot DO (y) :: QO$
 $+ RQ (OR \text{ five } c + x) \cdot QO$. Quare QO
 $= \frac{cy + xy}{y + b}$. Denique propter aequales angulos

DMQ , DQM aquantur MO & QO , hoc est
 $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$. Divide omnia per y , & mul-

tiplica per denominatores, & orietur $cy + cb - xy$
 $- xb = cy - cb + xy - xb$, five $cb = xy$, notifi-
sima aequatio ad Hyperbolam.

Quin etiam locus puncti D sine calculo Alge-
braico prodire potuit. Est enim ex superioribus
 $DO - BN \cdot QN :: DO \cdot MO (QO) :: DO$
 $+ AR \cdot OR$. Hoc est $DO - BN \cdot DO + BN$
 $:: ON \cdot OR$, & mixtim $DO \cdot BN :: \frac{ON + OR}{2}$

$(NP) \cdot \frac{OR - ON}{2} (OP)$. Adeoque $DO \times OP$
 $= BN \times NP$.

P R O B. XLII.

*Locum verticis trianguli invenire cujus Basis
datur, & angulorum ad basem unus dato an-
gulo differt à duplo alterius.*

IN Schemate novissimo superioris Problematis
sit ABD triangulum istud, AB basis bisecta
in P , APQ vel BPM triens anguli dati, quo
angulus DBA excedit duplum anguli DAB : &
angulus

angulus DMQ erit duplus anguli DQM . Ad MQ demitte perpendiculara AR , BN , DO ; & angulum DMQ biseca recta MS occurrente DO in S ; & erunt triangula DOQ , SOM similia; adeoque $OQ \cdot OM :: OD \cdot OS$, & dividendo $OQ - OM \cdot OM :: SD \cdot OS ::$ (per 3. VI. Elem.) $DM \cdot OM$. Quare (per 9. V. Elem.) $OQ - OM = DM$. Dictis jam $PO = x$, $OD = y$, AR vel $BN = b$, & PR vel $PN = c$, erit ut in superiori Problemate $OM = \frac{cy - xy}{y - b}$, & $OQ = \frac{cy + xy}{y + b}$,

adeoque $OQ - OM = \frac{-2bcy + 2xyy}{yy - bb}$. Pone jam

$$DOq + OMq = DMq, \text{ hoc est } yy + \frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb} yy = \frac{4bbcc - 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bbyy + b^4} yy. \text{ Et per debi-}$$

tam reductionem orietur tandem

$$y^4 * \begin{array}{r} + cc \\ - 2bb \end{array} yy + \begin{array}{r} + 2bxx \\ - 2cx \end{array} y - \begin{array}{r} + b^4 \\ - 3bbcc \\ + 2bbcx \\ + bbxx \end{array} = 0.$$

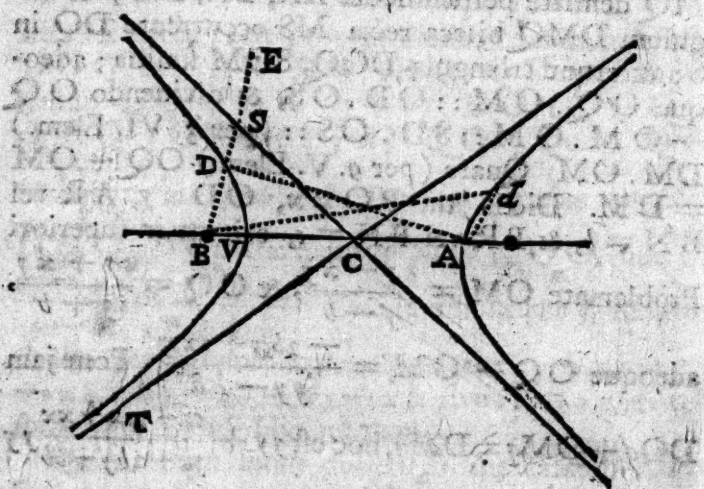
Divide omnia per $y - b$, & evadet

$$y^3 + byy - \begin{array}{r} - bb \\ - 2cx \end{array} y + \begin{array}{r} - b^3 \\ + 3bcc \\ + 2bcx \end{array} = 0. \text{ Quare punctum}$$

D est ad Curvam trium dimensionum; quæ tamen evadit Hyperbola ubi angulus BPM statuitur nullus, sive angulorum ad basem unus DBA duplus alterius DAB . Tunc enim BN , sive b evanescente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$.

Ex hujus autem æquationis constructione tale elicitur Theorema. Si centro C , Asymptotis CS , CT , angulum SCT 120 graduum continentibus describatur Hyperbola quævis DV , cujus semi-

axes sint CV, CA : produc CV ad B , ut sit

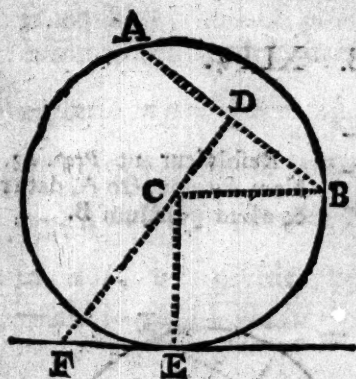


$VB = VC$, & ab A & B actis utcumque rectis AD, BD concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus BAD dimidium anguli ABD , triens vero anguli ADE quem recta AD comprehendit cum BD producta. Hoc intelligendum est de Hyperbola quæ transit per punctum V . Quod si ab iisdem punctis A & B actæ rectæ Ad, Bd conveniant ad conjugatam Hyperbolam quæ transit per A ; tunc externorum angulorum trianguli ad basem, ille ad B erit duplus alterius ad A .

P R O B. XLIII.

Circulum per data duo puncta describere qui rectam positione datam continget.

Sunto A & B puncta data, & EF recta positione data, & requiratur circulum ABE , per ista puncta describere qui contingat rectam istam FE . Iunge AB , & eam biseca in D . Ad D erige normalem



malem DF occurren-
tem rectæ FE in F, &
circuli centrum inci-
det in hanc novissime
ductam DF, puta in
C. Junge ergo CB;
& ad FE demitte CE
normalem, eritque E
punctum contactus, ac
CB, CE æquales in-
ter se, utpote radii
circuli quæsiti. Jam

cum puncta A, B, D, & F dentur, esto $DB = a$,
ac $DF = b$; & ad determinandum centrum cir-
culi quærat DC, quam ideo dic x . Jam in tri-
angulo CDB propter angulum ad D rectum, est

$\sqrt{DB^2 + DC^2}$, hoc est $\sqrt{aa + xx} = CB$. Est
& $DF - DC$ five $b - x = CF$. Et in triangulo
rectangulo CFE cum dentur anguli, dabitur ratio
laterum CF & CE; fit ista d ad e ; & erit CE
 $= \frac{e}{d} \times CF$ hoc est $= \frac{eb - ex}{d}$. Pone jam CB

& CE, (radios nempe circuli quæsiti,) æquales inter
se, & habebitur æquatio $\sqrt{aa + xx} = \frac{eb - ex}{d}$.

Cujus partibus quadratis & multiplicatis per
 dd , oritur $aadd + ddxx = eebb - 2eebx$

$+ eebb$
 $+ eexx$. Sive $xx = \frac{-2eebx - aadd}{dd - ee}$. Et extracta

radice, $x = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + ecaa - ddaa}}{dd - ee}$

Inventa est ergo longitudo DC adeoque centrum
C, quo circulus per puncta A & B describendus
est ut contingat rectam FE,

P R O B

P R O B. XLIV.

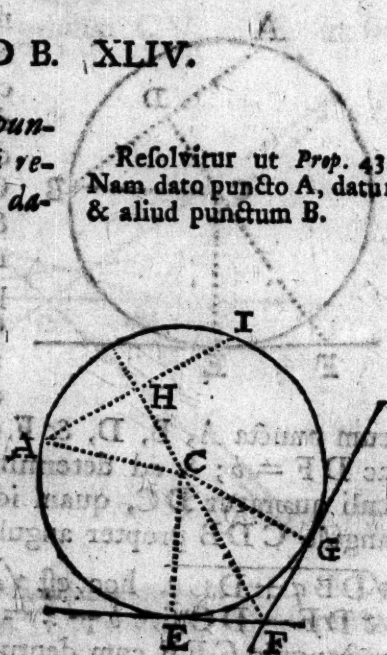
Circulam per datum punctum describere qui rectas duas positione datas continget.

Resolvitur ut Prop. 43.
Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.

Esto datum punctum A, & sint EF, FG rectae duae positione datae, & AEG circulus quaesitus easdem contingens, ac transiens per punctum istud A. Recta CF bifecetur: angulus EFG & centrum circuli in ipsa reperiatur. Sit istud C, & ad EF & FG demissis perpendicularibus CE, CG erant E ac G puncta contactus. Jam in triangulis CEF, CGF, cum anguli ad E & G, sint recti, & anguli ad F semisses sint anguli EFG, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum CF & CE vel CG. Sit ista d ad e , & si ad determinandum centrum circuli quaesiti C, assumatur

$CF = x$, erit CE vel $CG = \frac{ex}{d}$. Præterea ad

FC demitte normalem AH, & cum punctum A detur, dabuntur etiam rectae AH & FH. Dicantur istae a & b , & ab FH sive b ablato FC sive x restabit $CH = b - x$. Cujus quadrato $bb - 2bx + xx$ adde quadratum ipsius AH, sive aa & summa $aa + bb - 2bx + xx$, erit ACq per 47. I. Elem. siquidem angulus AHC ex Hypothesi sit rectus. Pone jam radios circuli AC & CG inter se



se æquales; hoc est pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum, & habebitur

$$\text{æquatio } aa + bb - 2bx + xx = \frac{eexx}{dd}. \text{ Aufer}$$

utrobique xx , & mutatis omnibus signis erit

$$-aa - bb + 2bx = xx - \frac{eexx}{dd}. \text{ Duc omnia}$$

in dd , ac divide per $dd - ee$, & evadet

$$\frac{-aadd - bbdd + 2bddx}{dd - ee} = xx. \text{ Cujus æquationis ex-}$$

$$\text{tracta radix est } x = \frac{bdd - d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}.$$

Inventa est itaque longitudo FC , adeoque punctum C , quod centrum est circuli quæsiti.

Si inventus valor x siue FC auferatur de b siue HF ,

$$\text{restabit } HC = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}.$$

eadem æquatio quæ in priori problemate prædiit, ad determinandum longitudinem DC .

PROB. XLV.

*Circulum per data duo puncta
describere, qui alium circum-
positione datum continget.*

Sint A, B puncta data, EK circulus positione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæsitus per puncta A & B transiens, ac tangens alterum circumulum in E , & C centrum ejus. Ad AB productum demitte perpendiculara CD , & FG & age CF , secantem circulos in puncto contactus E , ac age etiam FH parallelam DG , & occurrentem CD in H . His constructis dic AD
vel

pendicula CK, CL. Et cum sit $BC = CD$ vel
AK, erit $BK (= AB - AK) = AB - BC$, adeo-
que $BKq = ABq - 2AB \times BC + BCq$. Aufer
hoc de BCq , & restabit $2AB \times BC - ABq$, pro

quadrato de CK. Est itaque $AB \times 2BC - AB$
 $= CKq$, & eodem argumento erit $FN \times 2FC - FN$

$= CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB} + AB = 2BC$, &

$\frac{CLq}{FN} + FN = 2FC$. Quamobrem si pro AB,

CK, FN, KL, & CL, scribas a, y, b, c , & $c - y$, erit

$\frac{yy}{2a} + \frac{1}{2}a = BC$, & $\frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b = FC$. De

FC aufer BC, & restabit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b}$

$+ \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$. Jam si puncta ubi FN pro-

ducta secat rectam AD, & circulum GEM no-

tentur literis H, G, & M & in HG producta ca-

piatur $HR = AB$, cum sit $HN (= DQ = EF)$

$= GF$, addendo FH utrinque erit $FN = GH$,

adeoque $AB - FN (= HR - GH) = GR$,

& $AB - FN + 2EF$, hoc est $a - b + 2EF$

$= RM$, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Quare cum

supra fuerit $EF = \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a}$

$- \frac{1}{2}a$, si hoc scribatur pro EF habebitur $\frac{1}{2}RM$

$= \frac{cc - 2cy + yy}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{yy}{2a} - \frac{1}{2}a$. Dic ergo $RM = d$, &

erit $d = \frac{cc - 2cy + yy}{b} + b - \frac{yy}{a}$. Duc omnes ter-

minos in a & b , & orietur $abd = acc - 2acy$

$+ ayy - byy$. Aufer utrinque $acc - 2acy$, &

restabit $abd - acc + 2acy = ayy - byy$. Divide

per

per $a - b$, & orietur $\frac{abd - acc + 2acy}{a - b} = yy$. Et

extracta radice $y = \frac{at}{a - b} + \sqrt{\frac{aabd - abbd + abcc}{aa - 2ab + bb}}$

Quæ conclusiones sic abbreviari possunt. Pone $c.b :: d.e$, dein $a - b.a :: c.f$; & erit $fe - fc$

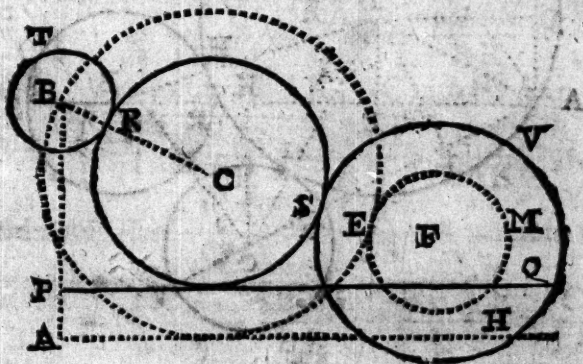
$+ 2fy = yy$, sive $y = f + \sqrt{ff + fe - fc}$. Invento

y sive KC vel AD , cape $AD = f + \sqrt{ff + fe - fc}$,

ad D erige perpendiculum $DC (= BC) = \frac{KC}{2AB}$

$+ \frac{1}{2} AB$, & centro C , intervallo CB vel CD describe circulum BDE , nam hic transiens per datum punctum B , tanget rectam AD in D , & circulum GEM in E . Q. E. F.

Hinc circulus etiam describi potest qui duos datos circulos, & rectam positione datam continget.

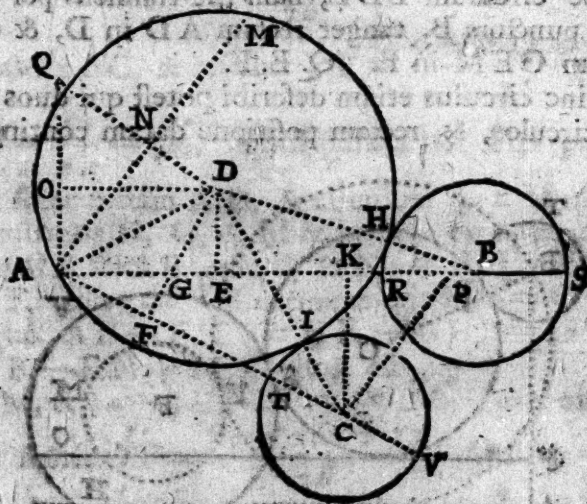


Sint enim circuli dati RT, SV , eorum centra B, F , & recta positione data PQ . Centro F , radio $FS - BR$ describe circulum EM . A puncto B , ad rectam PQ demitte perpendiculum BP , & producto eo ad A ut sit $PA = BR$ per A age AH parallelam PQ , & circulus describetur qui transeat per

per punctum B, tangatque rectam AH, & circum-
lum EM. Sit ejus centrum C; junge BC secan-
tem circumlum RT in R, & eodem centro C, radio
vero CR, descriptus circumlus RS tanget circumlos
RT, SV, & rectam PQ, ut ex constructione ma-
nifestum est.

P R O B. XLVII.

*Circulum describere qui per datum punctum trans-
sibit, & alios duos positione, & magnitudine
datos circumlos continget.*



Esto punctum datum A, sintque circuli positione,
& magnitudine dati TIV, RHS, centra eo-
rum C & B, circumlus describendus AIH centrum,
ejus D, & puncta contactus I & H. Junge AB,
AC, AD, DB, secetque AB producta circumlum
RHS in punctis R & S, & AC, producta circum-
lum

lum TIV in T & V. Et à punctis D & C demissis perpendicularis DE ad AB, & DF ad AC occurrente AB in G, atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \times BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & restabit $ABq - 2AD \times BR - BRq$, pro $2AE \times AB$. Est & $ABq - BRq = AB - BR \times AB + BR = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et $AR \times AS - 2AB \times AE = 2AD$.

Et simili ratiocinio in triang. ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR}$

$$= \frac{TAV - 2CAF}{CT} \quad \text{Et} \quad \frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR}$$

$$= \frac{2CAF}{CT} \quad \text{Et} \quad \frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} \times \frac{CT}{2AC}$$

= AF. Unde cum sit AK.AC :: AF.AG, erit

$$AG = \frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} \times \frac{CT}{2AK} \quad \text{Aufer}$$

hoc de AE sive $\frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, & restabit GE

$$= \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$$

Unde cum sit KC.AK :: GE.DE, erit

$$DE = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{2BAE}{BR} + \frac{2KAE}{CT} \times \frac{CT}{2KC}$$

In AB cape AP quæ sit ad AB ut CT ad BR,

$$\text{\& erit} \quad \frac{2PAE}{CT} = \frac{2BAE}{BR}, \quad \text{adeoque} \quad \frac{2PK \times AE}{CT} = 2BAE$$

$$= \frac{{}_2BAE}{BR} - \frac{{}_2KAE}{CT}, \text{ adeoque}$$

$$DE = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} - \frac{{}_2PK \times AE}{CT} \times \frac{CT}{{}_2KC}. \text{ Ad AB}$$

$$\text{erige ergo perpendicularum } AQ = \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} \times \frac{CT}{{}_2KC}, \text{ \& in eo cape } QO = \frac{PK \times AE}{KC}, \text{ \& erit } AO = DE.$$

Junge DO, DQ, CP, & triangu^{la} DOQ, CKP erunt similia, quippe quorum anguli ad O & K sunt recti, & latera (KC. PK :: AE, vel DO. QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales sunt, & proinde QD perpendicularis est ad CP. Quamobrem si agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangu^{la} A.Q.N, P.C.K similia; adeoque P.C. KC :: A.Q.

$$\text{AN. Unde cum } AQ \text{ sit } \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} \times \frac{CT}{{}_2KC},$$

$$\text{AN erit } \frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT} \times \frac{CT}{{}_2PC}. \text{ Produc AN ad}$$

M ut sit NM = AN, & erit AD = DM, adeoque circulus quæsitus transibit per punctum M. Cum ergo punctum M darum sit, ex his, sine ulteriori Analyfi, talis emergit Problematis resolutio.

In AB cape AP, quæ sit ad AB ut CT ad BR; jungè CP eique parallelam agè AM, quæ sit ad $\frac{RAS}{BR} - \frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope *Prob. 45.*

per puncta A & M describe circulum AIHM qui tangat alterutrum circulorum TIV, RHS, & idem circulus tanget utrumque. Q. E. F.

Et

GEOMETRICARUM. 195

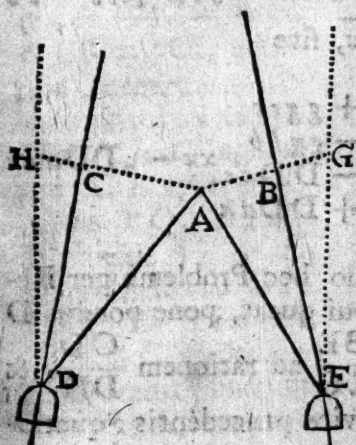
Et hinc circulus etiam describi potest qui tres circulos positione & magnitudine datos continget. Sunt trium datorum circulorum radii A, B, C , & centra D, E, F . Centris E & F , radiis $B \pm A$, $C \pm A$ describantur duo circuli, & tertius circulus qui hosce tangat, transeatque per punctum D . Sit hujus radius G , & centrum H , & eodem centro H radio $G \pm A$ descriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

P R O B. XLVIII.

Si ad extremitates fili DAE circa paxillam A labentis appendantur pondera duo D & E , quorum pondus E labitur per lineam obliquam BG : Invenire locum ponderis E , ubi pondera haec in aequilibrio consistunt.

PUta factum, & ipsi AD age parallelam EF quae sit ad AE , ut pondus E ad pondus D . Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendiculara AB, FG . Jam cum pondera ex Hypothesi sint ut lineae AE, EF , exponantur pondera per lineas istas, pondus D per lineam AE , & pondus E per lineam EF . Ergo Corpus E proprii ponderis vi directa EF tendit versus F , & vi obliqua EG tendit versus G . Et idem Corpus E , ponderis D vi directa AE , trahitur versus A , & vi obliqua BE , trahitur versus B . Cum itaque pondera se mutuo sustineant in aequilibrio, vis qua pondus E trahitur versus B aequalis esse debet vi contraria qua tendit versus G , hoc est BE aequalis esse debet ipsi EG . Jam vero datur ratio AE ad EF ex

DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ, & vis qua pondus E conatur descendere juxta lineam perpendicularem, hoc est tota



gravitas ipsius E erit ad vim qua pondus idem conatur descendere juxta lineam obliquam BE ut GE ad BE, atque vis qua conatur juxta lineam istam obliquam BE descendere erit ad vim qua conatur juxta lineam AE descendere, hoc est ad vim qua filum AE distenditur ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipsius E, erit ad tensionem fili AE ut

GE ad AE. Et eadem ratione gravitas ipsius D erit ad tensionem fili AD ut HD ad AD. Sic itaque fili totius DA + AE longitudo c, sitque pars ejus AE = x, & erit altera pars AD = c - x. Et quoniam est AEq - ABq = BEq, & ADq - ACq = CDq, sit insuper AB = a, & AC = b, & erit

$$BE = \sqrt{xx - aa} \text{ \& } CD = \sqrt{xx - 2cx + cc - bb},$$

Adhæc cum triangula BEG, CDH, dentur specie, sit BE . EG :: f . E, & CD . DH :: f . g, & erit $EG = \frac{E}{f} \sqrt{xx - aa}$, & $DH = \frac{g}{f} \sqrt{xx - 2cx + cc - bb}$

Quamobrem cum sit GE . AE :: pondus E . tensionem AE. Et HD . AD :: pondus D . tensionem AD, & tensiones istæ aquantur inter se, erit

$$\frac{E}{f \sqrt{xx - aa}} = \text{tensioni AE} = \text{tensioni AD}$$

vid. Porata.

N 3

= Dc

$$\begin{aligned}
 &= \frac{Dc - Dx}{g\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}} \quad \text{Cujus æquationis} \\
 &\text{reductione provenit } gx\sqrt{xx - 2cx + cc - bb} \\
 &= Dc - Dx\sqrt{xx - 2cx + cc - bb}, \text{ five} \\
 &\quad + ggcc \\
 &- \frac{gg}{DD} x^4 + \frac{2ggc}{2DDc} x^3 - \frac{ggbb}{DDcc} xx - 2DDcaax \\
 &\quad + DDcaa = 0.
 \end{aligned}$$

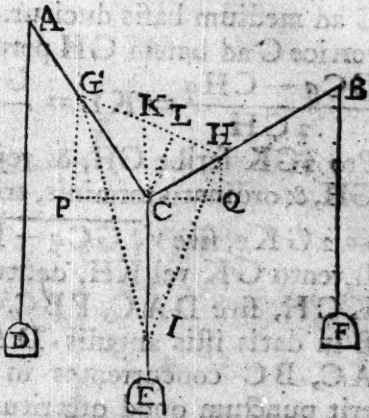
Si casum desideras quo hoc Problema per Regulam & circinum construi queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$, & evadet $g = D$, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc $-\frac{aa}{bb}xx - 2aacx + aacc = 0$;
five $x = \frac{ac}{a+b}$.

P R O B. XLIX.

Si ad filum D A C B F circa paxillos duos A, B, labile appendantur tria pondera D, E, F; D & F ad extremitates fili & E ad medium ejus punctum C, inter paxillos positum: Ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti C, ad quod medium pondus appenditur ubi pondera consistunt in æquilibrio.

CUM tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF, tensiones filorum AC, BC, EC erunt ut pondera D, F, E.
In

In eadem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI . Compleatur triangulum GHI . Prodiit IC donec ea occurrat GH in K , & erit $GK = KH$, & $CK = \frac{1}{2}CI$, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI . Nam per C agatur ipsi CE perpendicularare PQ , & huic à punctis G & H perpendiculararia GP, HQ . Et si vis qua filum AC vi ponderis D trahit punctum



C versus A , exponatur per lineam GC , vis qua filum istud trahet idem punctum versus P exponetur per lineam CP , & vis qua trahit illud versus K exponetur per lineam GP . Et similiter vires quibus filum BC vi ponderis F , trahit idem punctum C versus B , Q & K , exponentur per lineas CH, CQ, HQ ; & vis qua filum CE vi ponderis E , trahit punctum illud C versus E , exponetur per lineam CI . Jam cum punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in æquilibrio, summa virium quibus fila AC & BC , simul trahunt punctum C versus K , æqualis erit vi contrariæ qua filum EC , trahit punctum illud versus E , hoc est summa $GP + HQ$, æqualis erit ipsi CI ; & vis qua filum AC trahit punctum C versus P , æqualis erit vi contrariæ qua filum BC , trahit idem punctum C versus Q , hoc est linea PC æqualis lineæ CQ . Quare cum PG, CK & QH parallelæ sint, erit etiam $GK = KH$, & $CK (= \frac{GP + HQ}{2}) = \frac{1}{2}CI$.

Quod erat ostendendum. Restat itaque triangulum GCH determinandum, cujus latera GC & HC , dantur, una cum linea CK , quæ à vertice C ad medium basis ducitur. Demittatur itaque à vertice C ad basem GH perpendicularum CL , & erit

$$\frac{GCq - CHq}{2GH} = KL = \frac{GCq - KCq - GKq}{2GK}$$

Pro $2GK$ scribe GH , & rejecto communi divisore GH , & ordinatis terminis, erit $GCq - 2KCq + CHq = 2GKq$, five $\sqrt{\frac{1}{2}GCq - KCq + \frac{1}{2}CHq} = GK$. Invento GK vel KH , dantur simul anguli GCK , KCH , five DAC , FBC . Quare à punctis A & B in datis istis angulis DAC , FBC duc lineas AC , BC concurrentes in puncto C , & istud C erit punctum quod quaeritur.

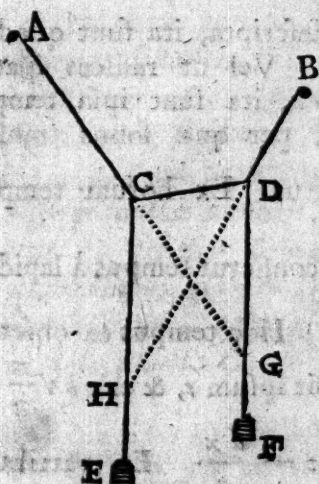
Cæterum quaestiones omnes quæ sunt ejusdem generis non semper opus est per Algebram sigillatim solvere, sed ex solutione unius plerumque confectatur solutio alterius. Ut si jam proponeretur hæc quaestio.

Filo $ACDB$ in datas partes AC , CD , DB diviso & extremitatibus ejus ad paxillos duos A , B positione datos ligatis, si ad puncta divisionum C ac D appendantur pondera duo E & F ; ex dato pondere F , & situ punctorum C ac D , cognoscere pondus E .

EX præcedentis Problematis solutione satis facile colligetur hæcce solutio hujus. Producat lineas AC , BD , donec occurrant lineis DF , CE in G & H ; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH .

Et

Et hinc obiter patet ratio componendi state-



ram ex solis filis, qua pondus corporis cujusvis E,
ex unico dato pondere F cognosci potest.

PROB. L.

*Lapide in puteum decidente, ex sono lapidis fun-
dum percutientis, altitudinem putei cognoscere.*

SIT altitudo putei x , & si lapis motu uniformi-
ter accelerato descendat per spatium quodlibet
datum a in tempore dato b , & sonus motu unifor-
mi transeat per idem spatium datum a in tempo-
re dato d , lapis descendet per spatium x , in tem-
pore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, sonus autem qui fit à lapide in fun-
dum putei impingente ascendet per idem spatium x ,
in

in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim sunt spatia gravibus decidentibus descripta, ita sunt quadrata temporum descensus. Vel ut radices spatiorum, hoc est ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita sunt ipsa tempora. Et ut spatia x & a , per quæ sonus transit, ita sunt tempora transitus. Ex horum temporum $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$ summa, conflatur tempus à lapide demisso ad

sonus reditum. Hoc tempus ex observatione cognosci potest. Sit ipsum t , & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$.

Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis

$$\frac{bbx}{a} = tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}. \text{ Et per reductionem}$$

$$xx = \frac{2adt + abb}{dd}x - \frac{aat}{dd}. \text{ Et extracta radice}$$

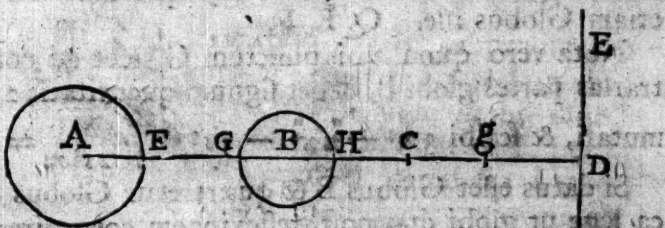
$$x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd}\sqrt{bb + 4dt}.$$

PROB.

PROB. LI.

Dato globo *A*, positione parietis *DE*, & centri globi *B* à pariete distantia *BD*; invenire motum globi *B* ea lege ut in spatii liberis, & vi gravitatis destitutus, si globus *A*, cujus centrum in linea *BD*, qua ad parietem perpendicularis est, ultra *B* producta consistit, uniformi cum motu versus *D* feratur donec is impingat in alterum quiescentem globum *B*; globus iste *B* postquam reflectitur à pariete, denuo occurrat globo *A* in dato puncto *C*.

SIT globi *A* celeritas ante reflectionem *a* & erit per PROB. XII. p. 92. celeritas globi *A* post reflexionem $= \frac{aA - aB}{A + B}$, & celeritas globi *B* post reflexionem $= \frac{2aA}{A + B}$. Ergo celeritas globi *A* ad celeritatem globi *B* est ut *A* — *B* ad 2*A*. In *GD* cape *gD* = *GH* diametro nempe globi *B*, & cele-



ritates iste erunt ut *GC* ad *Gg* + *gC*. Nam ubi Globus *A* impigit in globum *B*, punctum *G* quod in superficie globi *B* existens movetur in linea *AD*, perget per spatium *Gg* antequam globus ille *B* impingat in parietem, & per spatium *gC* postquam à pariete

pariete reflectitur; hoc est per totum spatium $Gg + gC$, in eodem tempore quo globi A punctum F perget per spatium GC , eo ut globus uterque rursus conveniant & in se mutuo impingant in puncto dato C. Quamobrem cum dentur intervalla BC & CD , dic $BC = m$, $BD + CD = n$, & $BG = x$, & erit $GC = m + x$, & $Gg + gC = GD + DC - 2gD = GB + BD + DC - 2GH = x + n - 4x$, seu $= n - 3x$. Supra erat $A - B$ ad $2A$ ut celeritas globi A ad celeritatem globi B, & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg + gC$, adeoque $A - B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg + gC$, ergo cum sit $GC = m + x$, & $Gg + gC = n - 3x$, erit $A - B$ ad $2A$ sicut $m + x$ ad $n - 3x$. Porro globus A est ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB, hoc est si ponas radium AF esse s , ut s^3 ad x^3 . Ergo $s^3 - x^3 : 2s^3 :: A - B : 2A :: m + x : n - 3x$. Et ductis extremis & mediis in se habebitur æquatio $s^3n - 3s^3x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2xs^3$. Et per reductionem $3x^4 - nx^3 - 5s^3x + s^3n = 0$. Cujus æquationis constructione dabitur globi B semidiameter x ; quo dato datur etiam Globus ille. Q. E. F.

Nota vero quod ubi punctum C jacet ad contrarias partes globi B, debet signum quantitatis $2m$ mutari, & scribi $3x^4 - nx^3 - 5s^3x + s^3n = 0$.

Si datus esset Globus B & quæreretur Globus A ea lege ut globi duo post reflexionem convenirent in C, quæstio foret facilior. Nempe in inventa æquatione novissima supponendum esset x dari & s quæri. Quæ ratione per debitam reductionem illius æquationis, translatis terminis $-5s^3x + s^3n - 2s^3m$ ad æquationis partem contrariam ac divisa utraque parte per $5x - n + 2m$, emergereu

$$3x^4 -$$

$3x^4 - nx^2 = s^3$. Ubi per solam extractionem
 $5x - n + 2m$ radicis cubicæ obtinebitur s .

Quod si dato Globo utroq; quæreretur punctum
 C in quo post reflexionem ambo in se mutuo im-
 pingerent: Cum supra fuerit $A - b$ ad $2A$ ut GC
 ad $Gg + gC$ ergo invertendo & componendo
 $3A - B$ erit ad $A - B$ ut $2Gg$ ad distantiam
 quæsitam GC .

PROB. LII.

Si globi duo A & B tenai jungantur filo PQ ,
 & pendente globo B à globo A , si demittatur
 globus A , ita ut globus uterque simul sola gra-
 vitatis vi in eadem linea perpendiculari PQ
 cadere incipiat; dein globus inferior B , post-
 quam à fundo seu plano horizontali FG sur-
 sum reflectitur, superiori decidenti globo A oc-
 currat in puncto quodam D : Ex data fili lon-
 gitudine PQ , & puncti illius D à fundo di-
 stantia DF , invenire altitudinem PF , à qua
 globus superior A ad hunc effectum demitti debet.

SIT fili PQ longitudo a . In perpendiculo
 $PQRF$ ab F sursum cape FE æqualem globi
 inferioris diametro QR , ita ut cum globi illius
 punctum infimum R incidit in fundum ad F , pun-
 ctum ejus supremum Q occupet locum E ; sitque
 ED distantia per quam globus ille postquam à
 fundo reflectitur ascendendo transit antequam glo-
 bo superiori decidenti occurrat in puncto D . Igi-
 tur ob datam puncti D à fundo distantiam DF ,
 globique inferioris diametrum EF , dabitur eorum
 differentia DE . Sit ea $= b$. Sitque altitudo per
 quam globus ille inferior antequam impingit in
 fundum

fundum cadendo describit R F vel Q E = x , siquidem ea ignoretur. Et invento x si eidem addantur E F & P Q habebitur altitudo P F, à qua globus superior ad effectum desideratum demitti debet.

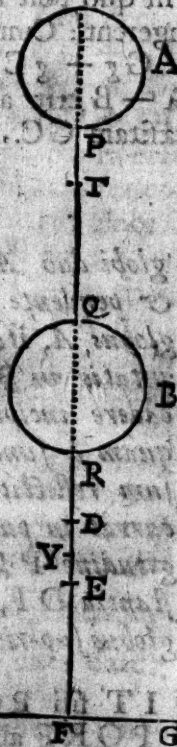
Cum igitur sit P Q = a , & Q E = x , erit P E = $a + x$. Aufer DE seu b , & restabit P D = $a + x - b$. Est autem tempus descensus globi A ut radix spatii cadendo descripti seu $\sqrt{a + x - b}$, & tempus descensus globi alterius B ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{x}$, & tempus ascensus ejusdem ut differentia radicis illius & radicis spatii quod cadendo tantum à Q ad D describeretur. Nam hæc differentia est ut tempus descensus à D ad E, quod æquale est tempori ascensus ab E ad D. Est autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Unde tempus descensus & ascensus conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Quamobrem cum hoc tempus æquetur tempori descensus globi superioris erit

$\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a + x - b = 3x - b - 4\sqrt{xx} + bx$, seu $a = 4x - 4\sqrt{xx} - bx$, & ordinata equatione $4x - a = 4\sqrt{xx} - bx$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx - 8ax + aa = 16xx - 16bx$, seu $aa = 8ax - 16bx$.

Et divisus omnibus per $8a - 16b$, fiet $\frac{aa}{8a - 16b} = x$.

Faci igitur ut $8a - 16b$ ad a ita a ad x , & habebitur x seu Q E. Q. E. I.

Quod



Quod si ex dato Q E quæreretur, fili longitudo P Q seu a ; eadem æquatio $aa = 8ax - 16bx$ extrahendo affectam radicem quadraticam daret

$a = 4x - \sqrt{16xx - 16bx}$. Id est si sumas Q Y mediam proportionalem inter Q D & Q E, erit P Q = 4 E Y. Nam media illa proportionalis erit

$\sqrt{xx - b}$, seu $\sqrt{xx - bx}$ quod subductum de x , seu Q E relinquit E Y, cuius quadruplum est $4x - 4\sqrt{xx - bx}$.

Sin vero ex datis tum Q E seu x tum fili longitudine P Q seu a , quæreretur punctum D in quo globus superior in inferiorem incidit; puncti illius à dato puncto E distantia DE seu b , è præcedente æquatione $aa = 8ax - 16bx$, eruetur transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum signis mutatis, & omnia dividendo per $16x$.

Orietur enim $\frac{8ax - aa}{16x} = b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x - a$ ita a ad b , & habebitur b seu DE.

Hactenus supposui globos tenui filo connexos simul dimitti. Quod si nullo connexi filo diversis temporibus dimittantur, ita ut globus superior Al verbi gratia prius dimissus, descenderit per spatium P T antequam globus alter ineipiat cadere, & ex datis distantis PT, P Q ac D E quærat altitude P F à qua globus superior dimitti debet ea lege ut in inferiorem incidat ad punctum D; sit P Q = a , D E = b , P T = c , & Q E = x , & erit P D = $a + x - b$ ut supra. Et tempora quibus globus superior cadendo describat spatia P T ac T D, & globus inferior prius cadendo dein reascendendo describat summam spatiorum Q E + E D erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD} - \sqrt{PT}$, & $\sqrt{QE} - \sqrt{QD}$ hoc est ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c}$, & $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. At ultima duo tempora, propterea quod spatia T D, & Q E + E D simul

simul describuntur, æqualia sunt. Ergo $\sqrt{a+x-b} - \sqrt{c} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Et partibus quadratis $a+c-2\sqrt{ca}+cx-cb=4x-4\sqrt{xx-bx}$. Pone $a+c=e$, & $a-b=f$, & erit per debitam reductionem $4x-e+2\sqrt{cf}+cx=4\sqrt{xx-bx}$, & partibus quadratis $ee-8ex+16xx+4cf+4cx+16x-4e\sqrt{cf}+cx=16xx-16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$ & pro $ee+4cf$ scripto m nec non pro $8e-16b-4c$ scripto n , habebitur per debitam reductionem $16x-4e\sqrt{cf}+cx=nx-m$. Et partibus quadratis $256cfxx+256cx^3-128cefx-128cexx+16ceef+16ceex=nxx-2mnx$
 $+256cf$
 $+mm$. Et ordinata æquatione $256cx^3-128cexx-128cef$
 $+16ceex+16ceef=0$. Cujus æquationis
 $+2mn$
 constructione dabitur x seu Q E, cui si addas datâs distantias P Q, & E F habebitur altitudo P F quam oportuit invenire.

P R O B. LIH.

Si globi duo quiescentes superior A, & inferior B diversis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat ubi superior cadendo jam descripsit spatium P T; invenire loca α , β quæ globi illi cadentes occupabunt ubi eorum intervallum $\alpha\chi$ dato æquale est.

CUM dentur distantie P T, P Q, & $\alpha\chi$ dic primam a , secundam b , tertiam c , & pro P α seu spatio quod globus superior antequam pervenit ad locum

locum quæsitum a cadendo describit ponatur $*$
 Jam tempora quibus globus superior describit spatia PT , $P\sigma$, $T\sigma$, & inferior spatium $Q\chi$ sunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\sigma}$, $\sqrt{P\sigma} - \sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$. Quorum temporum posteriora duo, eo quod globi cadendo simul describant spatia $T\sigma$ & $Q\chi$, sunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\sigma} - \sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\sigma = x$, & $PT = a$, & ad $P\sigma$ addendo $\sigma\chi$ seu c & à summa auferendo PQ seu b habebitur $Q\chi = x + c - b$. Quamobrem his substitutis fiet $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x + c - b}$. Et æquationis partibus quadratis orietur $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. Ac deletio utrobique x , & ordinata æquatione habebitur $a + b - c = 2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a + b - c$ æquale $4ax$, & quadratum illud divisum per $4a$ æquale x , seu $4a$ ad $a + b - c$ sicut $a + b - c$ ad x . Ex invento autem x seu $P\sigma$ datur globi superioris decidentis locus quæsitus a . Et per locorum distantiam simul datur etiam locus inferioris β .



Et hinc si punctum quærat ubi globus superior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo distantiam $\sigma\chi$ nullam esse seu delendo c , dñ $4a$ ad $a + b$ ut $a + b$ ad x , seu $P\sigma$, & punctum $*$ erit quod quæris.

Et vicissim si detur punctum illud α vel χ in quo globus superior incidit in inferiorem, & quaeratur locus T quem superioris globi decidentis punctum imum P tunc occupabat cum globus inferior incipiebat cadere; quoniam est $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x , seu ductis extremis & mediis in se $4ax = aa + 2ab + bb$, & per æquationis debitam ordinationem $aa = 4ax - 2ab - bb$; extrahe radicem

quadraticam & proveniet $a = 2x - b - 2\sqrt{xx - bx}$.

Cape ergo V mediam proportionalem inter P & Q , & versus V cape $VT = VQ$, & erit T punctum quod quaeris. Nam V erit $= \sqrt{P\alpha} \times Q$

hoc est $= \sqrt{xx - bx}$ seu $= \sqrt{xx - bx}$; cujus duplum subductum de $2x - b$, seu de $2P - PQ$, hoc est de $PQ + 2Q$ relinquit $PQ - 2VQ$ seu $PV - VQ$, hoc est PT.

Si denique globorum, postquam superior incidit in inferiorem, & impetu in se invicem facto inferior acceleratur, superior retardatur, desiderantur loci ubi inter cadendum distantiam datæ rectæ æqualem acquirerent: Quaerendus erit primo locus ubi superior impingit in inferiorem; dein ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eorum ubi in se impingunt celeritatibus inveniendæ sunt celeritates quas proxime post reflexionem habebunt, idque per modum *P R O B. XII. pag. 92.* Postea quaerenda sunt loca summa ad quæ globi celeritatibus hisce si sursum ferantur ascenderent, & inde cognoscentur spatia quæ globi datis temporibus post reflexionem cadendo describent, ut & differentia spatiorum: & vicissim ex assumpta illa differentia, per Analysin regredietur ad ipsa spatia cadendo descripta.

Ut si globus superior incidit in inferiorem ad punctum α , & post reflexionem celeritas superioris deor-

deorsum tanta sit, ut si fursum esset ascendere faceret globum illum per spatium σN , & inferioris celeritas deorsum tanta esset, ut si fursum esset, ascendere faceret globum illum inferiorem per spatium σM ; tum tempora quibus globus superior vicissim descenderet per spatia $N\sigma$, NG , & inferior per spatia $M\sigma$, MH , forent ut $\sqrt{N\sigma}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\sigma}$, $\sqrt{MH}$, adeoque tempora quibus globus superior conficeret spatium σG , & inferior spatium σH , forent ut $\sqrt{NG} - \sqrt{N\sigma}$, ad $\sqrt{MH} - \sqrt{M\sigma}$. Pone hæc tempora æqualia esse, & erit $\sqrt{NG} - \sqrt{N\sigma} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\sigma}$. Et insuper cum detur distantia GH pone $\sigma G + GH = \sigma H$. Et harum duarum æquationum reductione solvetur problema. Ut si sit $M\sigma = a$, $N\sigma = b$, $GH = c$, $\sigma G = x$; erit juxta posteriorem æquationem $x + c = \sigma H$. Adde $M\sigma$ fiet $MH = a + c + x$. Ad σG adde $N\sigma$, & fiet $NG = b + x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem erit $\sqrt{b + x} - \sqrt{b} = \sqrt{a + c + x} - \sqrt{a}$. Scribatur e pro $a + c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: & æquatio fiet $\sqrt{b + x} = \sqrt{e + x} + \sqrt{f}$. Et partibus quadratis $b + x = e + x + f + 2\sqrt{ef} + fx$, seu $e + f - b = 2\sqrt{ef} + fx$. Pro $e + f - b$ scribe g , & fiet $g = 2\sqrt{ef} + fx$, & partibus quadratis $gg = 4ef + 4fx$, & per reductionem $\frac{g^2}{4f} - e = x$.

P R O B. LIV.

Si duo sint globi *A*, *B* quorum superior *A* ab altitudine *G* decidens, in alterum inferiorem *B* à fundo *H* versus superiora resiliens incidat, & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuo recedant ut globus *A* vi reflexionis illius ad altitudinem priorem *G* redeat, idque eodem tempore quo globus inferior *B* ad fundum *H* revertitur; dein globus *A* rursus decidat, & in globum *B* à fundo resiliens denuo incidat, idque in eodem loco *AB* ubi prius in ipsum incidebat; & sic perpetuo globi ab invicem resiliant rursusque ad eundem locum redeant: Ex datis globorum magnitudinibus, positione fundi & loco *G* à quo globus superior decidit, invenire locum ubi globi in se mutuo impingent.

SIT *e* centrum globi *A*, & *f* centrum globi *B*, *d* centrum loci *G* in quo globus superior in maxima est altitudine, *g* centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit, *a* semidiameter globi *A*, *b* semidiameter globi *B*, *c* punctum contactus globorum in se mutuo impingentium, & *H* punctum contactus globi inferioris & fundi. Et celeritas globi *A*, ubi in globum *B* impingit, ea erit quæ generatur casu globi ab altitudine *de*, adeoque est ut $\sqrt{de}$. Hac eadem celeritate reflecti debet globus *A* versus superiora ut ad locum priorem *G* redeat. Et globus *B* eadem celeritate deorsum reflecti debet qua ascenderat ut eodem tempore

pore redeat ad fundum quo inde recesserat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales esse debent.

Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur, adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde si factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proxime ante & post reflexionem, seu sub fine ascensus & initio descensus. Erit igitur hæc celeritas

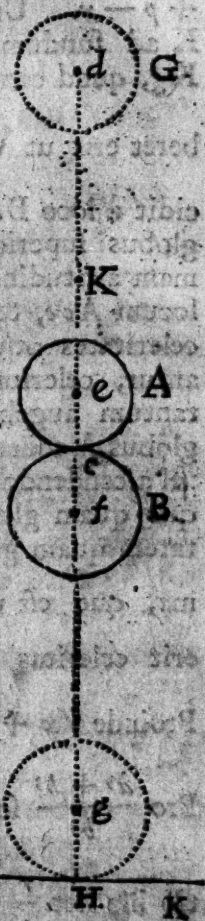
ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, seu cum globi sint ut

cubi radiorum ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut au-

tem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proxime ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hac celeritate, si occurſu globi A in eum decidentis non impediretur, ascenderet, ad altitudinem ed à qua globus A descendit. Hoc est ut $\frac{Aq}{Bq} de$ ad de

seu ut Aq ad Bq vel a^6 ad b^6 ita altitudo illa prior ad x , si modo pro altitudine posteriore cd ponatur x . Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum B si non

impediretur ascenderet, est $\frac{a^6}{b^6} x$. Sit ea fK . Ad fK adde fg , seu $dH - de - ef - gH$, hoc est $p - x$ si modo pro dato $dH - ef - gH$ scribas p ,



& x pro incognito de & habebitur $Kg = \frac{a^6}{b^6} x$

+ $p - x$. Unde celeritas globi B ubi decedit à K ad fundum, hoc est ubi decedit per spatium Kg, quod centrum ejus inter decidendum descri-

beret erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6} x + p - x}$. At globus ille de-

cidit à loco Bc*f* ad fundum eodem tempore quo globus superior A ascendit à loco Ace ad summam altitudinem d , aut vicissim descendit à d ad locum Ace, & proinde cum gravium cadentium celeritates aequalibus temporibus aequaliter augentur, celeritas globi B descendendo ad fundum tantum augebitur quanta est celeritas tota quam globus A eodem tempore cadendo à d ad e acquirit vel ascendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bc*f* adde celeritatem quam globus A habet in loco Ace, & summa, quae est ut $\sqrt{de} + \frac{a^3 \sqrt{de}}{b^3}$, seu $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3} \sqrt{x}$, erit celeritas globi B ubi is in fundum incidit.

Proinde $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3} \sqrt{x}$ aequabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6} x + p - x}$.

Pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$ scribe $\frac{r}{s}$ & pro $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$, $\frac{r^2}{ss}$ & aequa-

tio illa fiet $\frac{r}{s} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{r^2}{ss} x + p}$, & partibus qua-

dratis $\frac{r^2}{ss} x = \frac{r^2}{ss} x + p$. Aufer utrobique $\frac{r^2}{ss} x$,

duc omnia in ss ac divide per $rr - r^2$, & orietur

$x = \frac{ss p}{rr - r^2}$. Quae quidem aequatio prodiisset

sim-

simplicior si modo assumpsissem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, pro-

diisset enim $\frac{ss}{p-t} = x$. Unde faciendo ut sit $p-t$ ad s ut s ad x habebitur x seu ed ; cui si addas ec habebitur dc , & punctum c in quo globi in se mutuo impingent. Q. E. F.

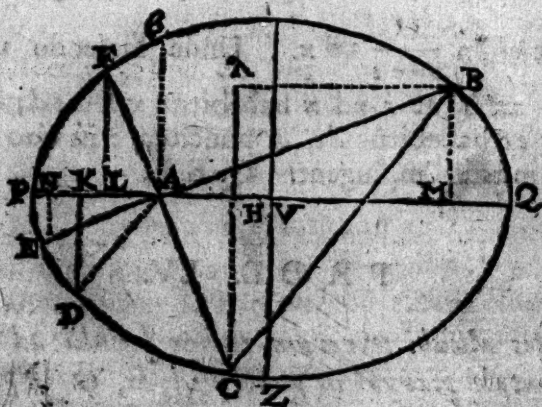
PROB. LV.

Erectis alicubi terrarum tribus baculis ad Horizontale planum in punctis A , B , & C perpendicularibus, quorum is qui in A sit sex pedum, qui in B octodecim pedum, & qui in C octo pedum, existente linea AB triginta trium pedum; contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A , transire per puncta B & C , baculi autem B per A & C , ac baculi C per punctum A . Queritur declinatio solis & elevatio Poli, sive dies locusque ubi hac evenierint?

Quoniam umbra baculi cujusque descripsit Conicam sectionem, sectionem nempe Coni radiofi cujus vertex est baculi summitas; fingam $BCDEF$, esse hujusmodi curvam (sive ea sit Hyperbola, Parabola vel Ellipsis) quam umbra baculi A eo die descripsit, ponendo AD , AE , AF ejus umbras fuisse cum BC , BA , CA respective fuerunt umbræ baculorum B & C . Et præterea fingam PAQ esse lineam Meridionalem sive axem hujus curvæ ad quem demissæ perpendiculares BM , CH , DK , EN , & FL , sunt ordinatim applicatæ. Has vero ordinatim applicatas indefinite designabo litera y , & axis partes interceptas AM , AH , AK ,

O 4
AN,

AN, & AL litera x . Fingam denique æquationem



$aa \pm bx \pm cxx = yy$, ipsarum x & y relationem (*i.e.* naturam Curvæ) designare, assumendo aa , b & c tanquam cognitæ ut ex Analyfi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y , duarum tantum dimensionum posui quia æquatio est ad Conicam sectionem; & ipsius y dimensiones impares omisi quia ipsa est ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipsorum b & c , quia indeterminata sunt designavi notula $\pm$ quam indifferenter pro $+$ aut $-$ usurpo, & ejus oppositum $-$ pro signo contrario. At signum quadrati aa affirmativum posui, quia baculum A umbras in adversas plagas (C & F, B & E) projicientem concava pars curvæ necessario complectitur, & proinde si ad punctum A erigatur perpendiculum Al , hoc alicubi occurreret curvæ puta in β , hoc est, ordinatim applicata y , ubi x nullum est, erit reale. Nam inde sequitur quadratum ejus, quod in eo casu est aa , affirmativum esse.

Constat itaque quod æquatio hæc fictitia $aa \pm bx \pm cxx = yy$, sicut terminis superfluis non referta sic neque restrictor est quam ut ad omnes hujus

pro-

problematis conditiones se extendat, Hyperbolam, Ellipfin vel Parabolam quamlibet designatura prout ipsorum aa, b, c , valores determinabuntur, aut nulli forte reperientur. Quid autem valent, quibusque signis b & c debent affici, & inde quænam sit hæc curva ex sequenti Analyfi constabit.

Analyseos pars prior.

Cum umbræ sint ut altitudines baculorum erit $BC. AD :: AB. AE (:: 18. 6.) :: 3. 1$. Item $CA. AF (:: 8. 6.) :: 4. 3$. Quare nominatis $AM = r$, $MB = s$, $AH = t$, & $HC = \frac{1}{2}v$. Ex similitudine triangulorum AMB, ANE , &

AHC, ALF erunt $AN = -\frac{r}{3}$. $NE = -\frac{s}{3}$.

$AL = -\frac{3t}{4}$. Et $LF = +\frac{3v}{4}$: Quarum signa

signis ipsarum AM, MB, AH, HC contraria posui quia tendunt ad contrarias plagas respectu puncti A à quo ducuntur, axisve PQ cui insistant. His autem pro x & y in æquatione fictitia $aa + bx + cx = yy$, respective scriptis,

r & s dabunt $aa + br + crr = ss$.

$-\frac{r}{3}$ & $-\frac{s}{3}$ dabunt $aa + \frac{br}{3} + \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss$.

t & v dabunt $aa + bt + ctt = vv$.

$-\frac{3}{4}t$ & $+\frac{3}{4}v$ dabunt $aa + \frac{3}{4}bt + \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv$.

Jam è prima & secunda harum exterminando ss ut obtineatur r , prodit $\frac{2aa}{1+b} = r$. Unde patet $+b$ esse

affirmativum. Item è tertia & quarta exterminando vv ut obtineatur t prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et scriptis in-

super

super $\frac{2aa}{b}$ pro r in prima, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertia, ori-
untur $3aa + \frac{4a^3c}{bb} = rs$, & $\frac{1}{3}aa + \frac{a^3c}{9bb} = uv$.

Porro demissa B_λ perpendiculari in CH , erit BC .
 $AD (:: 3. 1) :: B_\lambda. AK :: C_\lambda. DK$. Quare cum
sit $B_\lambda (= AM - AH = r - t) = \frac{5aa}{3b}$, erit $AK = \frac{5aa}{9b}$,
vel potius $= -\frac{5aa}{9b}$. Item cum sit $C_\lambda (= CH$

$$+ BM = v + s) = \sqrt{\frac{4aa}{3} + \frac{a^3c}{9bb}} + \sqrt{3aa + \frac{4a^3c}{bb}},$$

$$\text{erit } DK (= \frac{1}{3}C_\lambda) = \sqrt{\frac{4aa}{27} + \frac{a^3c}{81bb}} + \sqrt{\frac{1}{3}aa + \frac{4a^3c}{9bb}}.$$

Quibus in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro AK
ac DK sive x , & y respective scriptis, prodit $\frac{4aa}{9}$

$$\left(\pm \frac{25a^3c}{81bb} = \frac{11}{27}aa + \frac{37a^3c}{81bb} \pm 2\sqrt{\frac{4aa}{27} + \frac{a^3c}{81bb}} \right)$$

$$\times \sqrt{\frac{aa}{3} + \frac{4a^3c}{9bb}}. \text{ Et per reductionem } -bb + 4aac$$

$$= \pm 2\sqrt{36b^2 + 51aabb + 4a^3c}, \text{ \& partibus} \\ \text{quadratis iterumque reductis, exit } 0 = 143b^4 \\ + 196aabb, \text{ sive } \frac{-143bb}{196aa} = \pm c. \text{ Unde con-}$$

stat $+c$ negativam esse, adeoque æquationem fi-
ctitiam $aa + bx + cxx = yy$, hujus esse formæ
 $aa + bx - cxx = yy$, & ideo curvam quam de-
signat Ellipsin esse. Ejus vero centrum & axes duo
sic eruantur.

Ponendo $y = 0$, sicut in Figuræ verticibus P &
 Q contingit, habebitur $aa + bx = cxx$, & extra-
cta

sta radice, $x = \frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}} = \frac{AQ}{AP}$. Adeoque sumpto $AV = \frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipsis, & VQ

vel VP $(\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}})$ semiaxis maximus. Si porro

ipfius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in æquatione $aa + bx$

$- cxx = y$, scribatur, fiet $aa + \frac{bb}{4c} = yy$. Qua-

re est $aa + \frac{bb}{4c} = VZ^2$, hoc est quadrato semiaxis

minimi. Denique in valoribus ipsarum AV, VQ,

VZ jam inventis, scripto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c , exeunt

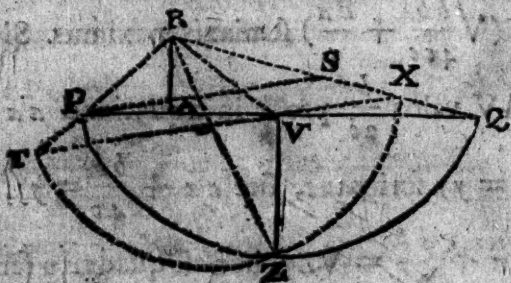
$$\frac{98aa}{143b} = AV, \frac{112aa\sqrt{3}}{143b} = VQ, \& \frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}} = VZ$$

Analyseos pars altera.

Supponatur jam baculum puncto A insistens esse AR, & erit RPQ planum meridionale ac RPZQ conus radiosus cuius vertex est R. Sit insuper TXZ planum secans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX, quæ sectio sit ad axem mundi conive perpendicularis, & ipsum planum TXZ erit ad eundem axem perpendicularare, & eundem secabit in peripheria circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo RX, RZ, RT distabit. Quamobrem si PS ipsi TX parallela ducatur, fiet RS = RP propter æquales RX, RT; nec non SX = XQ propter æquales PV, VQ. Unde est RX vel RZ $(= \frac{RS + RQ}{2}) = \frac{RP + RQ}{2}$.

Deni-

Denique ducatur RV, & cum VZ perpendiculariter insistas plano RPQ, (sectio utique existens planorum eidem perpendiculariter insistentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.



Dictis jam $RA = d$, $AV = e$, VP vel $VQ = f$, & $VZ = g$, erit $AP = f - e$, & $RP = \sqrt{ff - 2ef + ee + dd}$. Item $AQ = f + e$, & $RQ = \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}$: adeoque $RZ (= \frac{RP + RQ}{2})$

$$= \frac{\sqrt{ff - 2ef + ee + dd} + \sqrt{ff + 2ef + ee + dd}}{2}$$

Cujus quadratum $\frac{dd + ee + ff}{2} +$

$\frac{1}{2} \sqrt{ff^2 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2dde + d^4}$, est æquale $(RV^2 + VZ^2 = RA^2 + AV^2 + VZ^2 =)$ $dd + ee + gg$. Jam reductione facta est

$\sqrt{ff^2 - 2eeff + e^4 + 2ddff + 2dde + d^4} = dd + ee - ff + 2gg$, & partibus quadratis ac in ordinem reductis, $ddff = ddgg + eegg - ffgg + g^4$,

sive $\frac{ddff}{gg} = dd + ee - ff + gg$. Denique 6, $\frac{98aa}{143b}$,

$\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipsorum AR, AV, VQ,

VQ,

GEOMETRICARUM. 221

VQ, & VZ, pro d, e, f , ac g reſtitutis, oritur
 $36 - \frac{196a^4}{143bb} + \frac{192aa}{143} = \frac{36 \times 14 \times 14aa}{143bb}$, & inde

per reductionem $\frac{49a^4 + 36 \times 49aa}{48aa + 1287} = bb$.

In primo Schemate eſt $AMq + MBq = ABq$,
 hoc eſt $rr + ss = 33 \times 33$. Erat autem $r = \frac{2aa}{b}$,

& $ss = 3aa - \frac{4a^4}{bb}$, unde $rr = \frac{4a^4}{bb}$, & (ſubſtituto

$\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss = \frac{49a}{49}$ Quare $\frac{4a^4}{bb} + \frac{4aa}{49} = 33 \times 33$,

& inde per reductionem iterum reſultat $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa}$

$= bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb ,
 & dividendo utramque partem æquationis per 49

fit $\frac{a^4 + 36aa}{48aa + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4aa}$. Cujus parti-

bis in crucem multiplicatis, ordinatis, ac diviſis per
 49, exit $4a^4 = 981aa + 39204$ cujus radix aa eſt

$$\frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280 \text{ L } 2254144$$

Supra inventum fuit $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4aa} = bb$, ſive

$\frac{14aa}{\sqrt{53361 - 4aa}} = b$. Unde $AV \left(\frac{98aa}{143b} \right)$ eſt

$\frac{7\sqrt{53361 - 4aa}}{143}$, & VP vel VQ $\left(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b} \right)$ eſt

$\frac{8}{143} \sqrt{160083 - 12aa}$. Hoc eſt ſubſtituendo

280 L 2254144 pro aa , ac terminos in decimales
 numeros reducendo, $AV = 11 \text{ L } 188297$, & VP vel

VQ =

$VQ = 21^{\circ} 14' 7085$. Adcoque $AP (PV - AV)$
 $= 10^{\circ} 958788$, & $AQ (AV + VQ) 33^{\circ} 335382$.

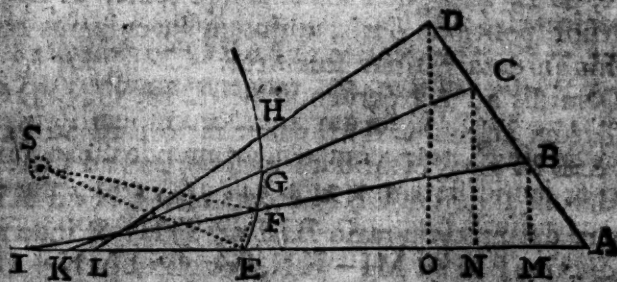
Denique si $\frac{1}{2} AR$ five 1 ponatur Radius, erit $\frac{1}{2} AQ$
 five $5^{\circ} 555897$ tangens anguli ARQ $79^{\circ} 47' 48''$,
 & $\frac{1}{2} AP$ five $1^{\circ} 825468$ tangens anguli ARP
 $61^{\circ} 17' 57''$. Quorum angulorum semisumma
 $70^{\circ} 32' 52''$, est complementum declinationis
 solis; & semidifferentia $9^{\circ} 14' 56''$, complemen-
 tum latitudinis Loci. Proinde declinatio solis erat
 $19^{\circ} 27' 8''$, & Latitudo loci $80^{\circ} 45' 4''$.
 Quae erant inveniendae.

PROB. LVI.

*E Cometa motu uniformi rectilineo per Caelum
 trajectantis locis quatuor observatis, distantiam
 à terra, motusque determinationem, in Hypo-
 thesi Copernicana colligere.*

SI è centro Cometae in locis quatuor observatis,
 ad planum Eclipticae demittantur totidem per-
 pendicula, sintque A, B, C, D puncta in plano
 illo in quae perpendicula incidunt; Per puncta illa
 agatur recta AD, & hæc secabitur à perpendiculis
 in eadem ratione cum linea quam Cometa motu
 suo describit, hoc est, ita ut sit AB ad AC ut
 tempus inter primam & secundam observationem
 ad tempus inter primam ac tertiam, & AB ad AD
 ut tempus illud inter primam & secundam obser-
 vationem ad tempus inter primam & quartam. Ex

observationibus itaque dantur rationes linearum
AB, AC, AD ad invicem.



P—

Q—

Insuper in eodem Eclipticæ plano sit S Sol, EH
arcus lineæ Eclipticæ in qua terra movetur, E, F,
G, H loca quatuor terræ temporibus observationum,
E locus primus, F secundus, G tertius, H quar-
tus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & produ-
cantur donec tres posteriores priorem secent in I,
K & L, BF in I, CG in K, DH in L. Er-
unt anguli AIB, AKC, ALD differentiæ lon-
gitudinum observatarum Cometæ; AIB differen-
tia longitudinum loci primi Cometæ & secundi;
AKC differentia longitudinum loci primi ac ter-
tii; & ALD differentia longitudinum loci pri-
mi & quarti. Dantur itaque ex observationibus
anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; & ob data puncta S, E, F,
datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF.
Datur etiam angulus SEA, utpote differentia lon-
gitudinis Cometæ & Solis tempore observationis
primæ. Quare si complementum ejus ad duos re-
ctos nempe angulum SEI, addas angulo SEF, da-
bitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur
anguli

anguli una cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et simili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur positione lineæ quatuor AI, BI, CK, DL, adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor positione datis, quintam inveniamus quæ ab his in data ratione secabitur.

Demissis ad AI perpendicularis BM, CN, DO, ob datum angulum AIB datur ratio BM ad MI. Est & BM ad CN in data ratione BA ad CA, & ob datum angulum CKN datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad MI - KN, hoc est ad MN + IK. Cape P ad IK ut est AB ad BC, & cum sit MA ad MN in eadem ratione, erit etiam P + MA ad IK + MN in eadem ratione; hoc est in ratione data. Quare datur ratio BM ad P + MA. Et simili argumento si capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q + MA. Et proinde ratio BM ad ipsorum P + MA & Q + MA differentiam, quoque dabitur. At differentia illa, nempe P - Q vel Q - P, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, simul dantur P + MA, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicularem, quæ sit ad lineam EA ut tangens latitudinis Cometæ in observatione prima ad radium, & istius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in observatione prima. Unde datur distantia Cometæ à Terra tempore illius observationis. Et eodem modo si è puncto B erigatur perpendicularis quæ sit ad lineam BF ut tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium, habebitur locus centri Cometæ in observatione illa secunda. Et acta linea à loco primo ad locum secundum, ea est in qua Cometa per Cælum trajicit.

P R O B.

triangulum CHK dabitur specie. Dic itaque $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, & $CK = y$. Et erit $BK \cdot CK :: Bf \cdot f^{\Delta}$. Ergo

$$fy = \frac{cy}{x} = Gd. \text{ Aufer hoc de } Ge, \text{ \& restabit}$$

$$ed = b - \frac{cy}{x}. \text{ Cum detur specie triangulum CKH,}$$

pone $CK \cdot CH :: d \cdot e$; & $CH \cdot HK :: e \cdot f$, & erit

$$CH = \frac{ey}{d}, \text{ \& } HK = \frac{fy}{d}. \text{ Adeoque } AH = m - x$$

$$- \frac{fy}{d}. \text{ Est autem } AH \cdot HC :: Ae \cdot ed, \text{ hoc est}$$

$$m - x - \frac{fy}{d} \cdot \frac{ey}{d} :: a \cdot b - \frac{cy}{x}. \text{ Ergo ducendo me-}$$

$$\text{dia \& extrema in se, fiet } mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy$$

$$- \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{aey}{d}. \text{ Duc omnes terminos in}$$

$$dx, \text{ eosq; in ordinem redige; \& fiet } fcy y - aexy - fb$$

$- dcm y - bdx x + bdm x = 0$. Ubi cum incognitae quantitates x & y , ad duas tantum dimensiones ascendunt, patet curvam lineam quam punctum C describit esse Conicam Sectionem. Pone

$$\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p, \text{ \& fiet } yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y$$

$$+ \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x. \text{ Et extracta radice } y = \frac{p}{f}x$$

$$+ \frac{dm}{2f} + \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$$

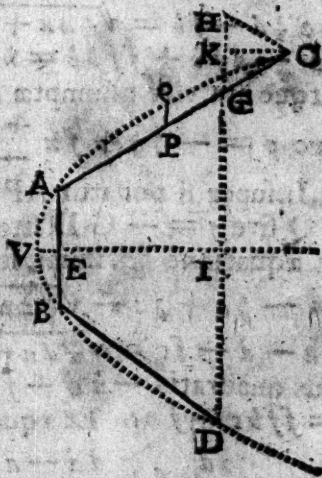
Unde

Unde colligitur Curvam Hyperbolam esse si sit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quam $\frac{pp}{ff}$; Parabolam si sit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipsin vel circulum si sit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quam $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

P R O B. LVIII.

Parabolam describere quæ per data quatuor puncta transibit.

Sint puncta illa data A, B, C, D. Junge AB & eam biseca in E. Et per E age rectam aliquam VE, quam concipe diametrum esse Parabolæ, puncto V existente vertice ejus. Junge AC ipsique AB parallelam age DG occurrentem AC in G. Dic AB = a, AC = b, AG = c, GD = d. In AC cape AP cujusvis longitudinis & à P age PQ parallelam AB, & concipiendo Q punctum esse Parabolæ; dic AP = x, PQ = y, & æquationem quamvis ad Parabolam assume quæ relationem



nem inter AP & PQ exprimat. Ut quod sit

$$y = e + fx \pm \sqrt{gg + hx}$$

Jam si ponatur AP five $x = 0$, puncto P incidente in ipsum A, fiet PQ five $y = 0$, ut $\& = -AB$. Scribendo autem in æquatione assumpta 0 pro x , fiet $y = e \pm \sqrt{gg}$, hoc est $= e \pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e + g$ est $= 0$, minor $e - g = -AB$ five $-a$. Ergo $e = -g$ & $e - g$, hoc est $-2g = -a$, five $g = \frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + hx}$.

Adhæc si ponatur AP five $x = AC$ ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum PQ = 0. Pro x igitur in æquatione novissima scribe AC five b , & pro y , 0, & fiet $0 = -\frac{1}{2}a + fb + \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$, five $\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}aa + hb}$; & partibus quadratis $-afb + ffb = hb$. Sive $ffb - fa = h$. Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffbx - fax}$.

Insuper si ponatur AP five $x = AG$ five c , fiet PQ five $y = -GD$ five $-d$. Quare pro x & y in æquatione novissima scribe c & $-d$, & fiet $-d = -\frac{1}{2}a + fc - \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffb c - fac}$. Sive $\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ffb c - fac}$. Et partibus quadratis $-ad - fac + dd + 2dcf + ccff = ffb c - fac$. Et æquatione ordinata & reducta

$$ff = \frac{2d}{b-c} f + \frac{dd-ad}{bc-cc}$$

scribe k , & æquatio illa fiet $ff = \frac{2d}{k} f + \frac{dd-ad}{kc}$.

Et

Et extracta radice $f = \frac{d}{k} + \sqrt{\frac{ddc + ddk - adk}{kkc}}$.

Invento autem f , æquatio ad Parabolam, viz.

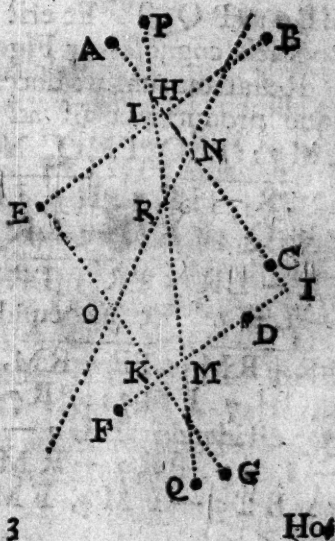
$$y = -\frac{1}{2}a + fx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}aa + ffbx - fax}, \text{ plene}$$

determinatur: Cujus itaque constructione Parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipsi CK parallelam age EI bifecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V, ut sit EV.EI::EBq.DIq—EBq, & erit V vertex, VE diameter, & $\frac{BEq}{VE}$ latus rectum Parabolæ quæsita.

PROB. LIX.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.

Sint puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc ID ad F, & EK ad G; ut sit AHC.BHE::AIC.FID::EKG.FKD, & erunt puncta F ac G in conica sectione, ut notum est.



Hoc tamen observare debebis, quod si punctum H cadit inter puncta omnia A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debet vel inter puncta omnia A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia D, F & E, G, vel extra ea omnia. At si punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C, debet punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & similiter punctum K debet cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: Id quod fiet capiendo I F, K G, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentia problematis. Inventis punctis F ac G, biseca AC, EG in N & O; item BE, FD in L & M. Junge NO, LM se mutuo secantes in R; & erunt LM & NO diametri conicae sectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatae ad diametrum LM. Produc LM hinc inde si opus est ad P & Q ita ut sit BLq. FMq. :: PLQ. PMQ, & erunt P & Q vertexes Conicae sectionis & PQ latus transversum. Fac PLQ. LBq. :: PQ. T. Et erit T latus rectum. Quibus cognitis cognoscitur Figura.

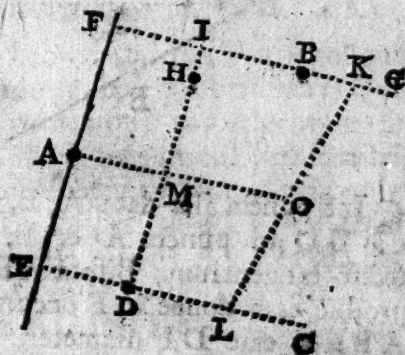
Restat tantum ut doceamus quomodo LM hinc inde producenda sit ad P & Q ita ut fiat BLq. FMq. :: PLQ. PMQ. Nempe PLQ five $PL \times LQ$ est $PR - LR \times PR + LR$, nam PL est $PR - LR$, & LQ est $RQ + LR$ seu $PR + LR$. Porro $PR - LR \times PR + LR$ multiplicando fit $PRq - LRq$. Et ad eundem modum PMQ est $PR + RM \times PR - RM$, seu $PRq - RMq$. Ergo $BLq. FMq. :: PRq - LRq. PRq - RMq$, & dividendo $BLq - FMq. FMq. :: RMq - LRq. PRq - RMq$. Quamobrem cum dantur BLq - FMq, FMq, & RMq - LRq dabitur

bitur $PRq - RMq$. Adde datum RMq , & dabitur summa PRq , adeoque & latus ejus PR , cui QR æqualis est.

PROB. LX.

Conicam sectionem describere quæ transibit per quatuor data puncta, & in uno istorum punctorum continget rectam positione datam.

Sint puncta quatuor data A, B, C, D , & recta positione data AE , quam conica sectio contingat in puncto A . Junge duo quævis puncta DC , & DC , producta si opus est, occurrat tangenti in E . Per quartum punctum B ipsi DC age parallelam BF , quæ occurrat eidem tangenti in F . Item tangenti parallelam age DI , quæ occurrat ipsi BF in I . In FB, DI , si opus est productis, cape FG, HI ejus longitudinis ut sit $AEq \cdot CED :: AFq \cdot BFG :: DIH \cdot BIG$. Et erunt puncta G & H in Conica sectione, ut notum est: Si modo capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I , juxta regulam in superiore Problemate traditam. Biseca BG, DC, DH in K, L & M . Junge KL, AM se mutuo secantes in O , & erit O centrum, A vertex, & $H M$ ordinatim applicata ad semidiametrum AO . Quibus cognitis cognoscitur figura.



—OF q . Est OF q = EO q — 2FEO + FE q
 Adeoque DOE — OF q = DOE — OE q + 2FEO
 — FE q = DEO + 2FEO — FE q . Et AE q .
 CF q :: DEO. DEO + 2FEO — FE q :: DE.
 DE + 2FE — $\frac{FEq}{EO}$. Datur ergo DE + 2FE

— $\frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato DE + 2FE, & resta-
 bit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$,
 adeoque dabitur EO. Dato autem EO simul da-
 tur VO medium proportionale inter DO & EO.

Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii
 satis expedite resolvuntur hæc problemata: Quæ
 tamen sine istis Theorematibus per Algebram so-
 lam resolvi possent. Ut si proponatur primum tri-
 um novissimorum Problematum: Sint puncta quin-
 que data A, B, C, D, E, per quæ Conica sectio
 transire debet. Junge duo quævis AC, & alia duo
 BE rectis se secantibus in H. Ipsi BE parallelam
 age DI occurrentem AC in I; ut & aliam quam-
 vis rectam KL occurrentem AC in K, & conicæ
 sectioni in L. Et finge Conicam sectionem datam
 esse, ita ut cognito puncto K simul cognoscatur
 punctum L. Et posito AK = x , & KL = y , ad
 exprimendam relationem inter x & y , assume quam-
 vis æquationem quæ Conicas sectiones generaliter
 exprimit, puta hanc $a + bx + cx^2 + dy + exy$
 $+ yy = 0$, ubi a, b, c, d, e denotant quantitates
 determinatas cum signis suis, x vero & y quantita-
 tes indeterminatas. Si jam quantitates determina-
 tas a, b, c, d, e invenire possumus, habebimus Co-
 nicam sectionem. Fingamus ergo punctum L suc-
 cessive incidere in puncta A, C, B, E, D, & videa-
 mus quid inde sequetur. Si ergo punctum L in-
 cidit in punctum A, erit in eo casu AK & KL,
 hoc

endo g pro x & $-k$ pro y , æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfg + cgg - dk - egk + kk = 0$.
 Aufer hoc de superiori æquatione $-cfg + cgg + dh + egb + hh$, & restabit $dh + egb + hh + dk + egk - kk = 0$. Divide hoc per $b + k$, & fiet $d + eg + b - k = 0$. Hoc ductum in b aufer de $-cfg + cgg + db + egb + hh = 0$, & restabit $-cfg + cgg + bk = 0$, seu $\frac{bk}{-gg + fg} = c$.

Denique si punctum L incidit in punctum D , erit AK , seu $x = AI$, & KL seu $y = ID$. Quare pro AI scribe m & pro ID n , & perinde pro x & y substitue m & n , & æquatio $-cfx + cxx$, &c. evadet $-cfm + cmm + dn + emn + nn = 0$. Hoc divide per n & fiet $\frac{-cfm + cmm}{n} + d + em + n = 0$.

Aufer $d + eg + b - k = 0$, & restabit $\frac{-cfm + cmm}{n} + em - eg + n - b + k = 0$. Sive $\frac{cmm - cfm}{n} + n - b + k = eg - em$.

Jam vero obdata puncta A, B, C, D, E dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI , hoc est f, g, m, h, k, n . Atque adeo per æquationem $\frac{bk}{fg - gg} = c$ datur c . Dato autem c ,

per æquationem $\frac{cmm - cfm}{n} + n - b + k = eg$

$-em$ datur $eg - em$. Divide hoc datum per datum $g - m$, & emerget datum e . Quibus inventis æquatio $d + eg + b - k = 0$, seu $d = k - b - eg$ dabit d . Et his cognitis simul determinatur æquatio ad quæsitam Conicam sectionem $cfx = cxx + dy + exy + yy$. Et ex ea æquatione per methodum Cartesii determinabitur Conica sectio.

Quod

Quod si quatuor A, B, C, E, & positio rectae AF quae tangit Conicam sectionem ad unum istorum punctorum A daretur, posset Conica sectio sic facilius determinari. Inventis ut supra æquationibus

$$cfx = cxx + dy + exy + yy, \quad d = k - b - eg,$$

& $c = \frac{bk}{fg - gg}$, concipe tangentem AF occurrere rectae EH in F, dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipsius LK ad AK erit ratio FH ad AH, ut contemplanti figuram constare potest. Dic vero $FH = p$, & in hoc casu ubi LK est ad AK in ultima ratione erit $p.g::y, x$, sive $\frac{gy}{p} = x$.

Quare pro x in æquatione $cfx = cxx + dy + exy + yy$, scribe $\frac{gy}{p}$, & prietur $\frac{c f g y}{p} = \frac{c g g y}{p p} + d y$

$$+ \frac{c g y y}{p} + yy. \text{ Divide omnia per } y \text{ \& emerget}$$

$$\frac{c f g}{p} = \frac{c g g y}{p p} + d + \frac{c g y}{p} + y. \text{ Jam quia suppo-}$$

nitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL seu y infinite parvum vel nihil esse, dele terminos qui per y multiplicantur, & restabit $\frac{c f g}{p} = d$.

$$\text{Quare fac } \frac{bk}{fg - gg} = c \text{ dein } \frac{c f g}{p} = d, \text{ denique}$$

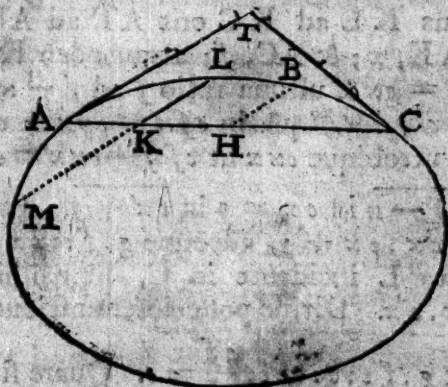
$$\frac{k - b - d}{g} = e, \text{ \& inventis } c, d \text{ \& } e, \text{ æquatio}$$

$$cfx = cxx + dy + exy + yy \text{ determinabit conicam sectionem.}$$

Si denique tria tantum puncta A, B, C dentur, una cum positione duarum rectarum AT, CT quae tangunt Conicam sectionem in duobus isto-
rum

GEOMETRICARUM. 237

rum punctorum A & C, obtinebitur ut supra ad Conicam sectionem æquatio hæc $cx^2 = cxx + dy + exy + yy$. Deinde si supponatur ordinatam KL parallelam esse tangenti AT, & concipiatur



eam produci donec rursus occurrat Conicæ sectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem AT donec cum ea conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis, ut contemplanti figuram constare potest. Quamobrem in illo casu existentibus KL & KM, sibi invicem æqualibus, hoc est duobus valoribus ipsius y (affirmativo scilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis $cx^2 = cxx + dy + exy + yy$ termini illi in quibus y est imparis dimensionis, hoc est termini $+dy + exy$ respectu termini yy in quo y est paris dimensionis, evanescere. Aliter enim duo valores ipsius y , affirmativus & negativus, æquales esse non possunt. Et in illo quidem casu AK infinite minor erit quam LK, hoc est x quam y , proinde & terminus exy quam terminus yy . Atque adeo infinite minor existens, pro nihilo habendus erit. At terminus dy respectu termini yy , non evanescet ut oportet, sed eo major erit nisi d supponatur esse nihil. De-
lendus

Delendus est itaque terminus dy , & sic restabit $cfx = cxx + exy + yy$, æquatio ad conicam sectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT sibi mutuo occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C donec in illud incidat. Et ultima ratio ipsius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y ; AK, x ; & AC, f ; atque adeo KC, $f - x$. Dic AT = g , & ultima ratio y ad $f - x$, erit ea quæ est g ad f . Æquatio $cfx = cxx + exy + yy$, subducto utrobique cxx fit $cfx - cxx = exy + yy$,

hoc est, $f - x$ in $cx = y$ in $ex + y$. Ergo est $y : f - x :: cx : ex + y$, adeoque $g : f :: cx : ex + y$. At puncto L incidente in C, fit y nihil. Ergo $g : f :: cx : ex$. Divide posteriorem rationem per x ,

& evadet $g : f :: c : e$, & $\frac{ef}{g} = e$. Quare si in æqua-

tione $cfx = cxx + exy + yy$, scribas $\frac{ef}{g}$ pro e ,

fiet $cfx = cxx + \frac{ef}{g}xy + yy$, æquatio ad con-

nicam sectionem. Denique ipsi KL seu AT à dato puncto B per quod Conica sectio transire debet age parallelam BH occurrentem AC in H, & concipiendo LK accedere ad BH donec cum ea coincidat, in eo casu erit AH = x , & BH = y . Dic ergo datam AH = m , & datam BH = n , & perinde pro x & y in æquatione $cfx = cxx$

$+ \frac{ef}{g}xy + yy$, scribe m & n , & orietur $cfm = cmm$

$+ \frac{ef}{g}mn + nn$. Aufer utrobique $cmm + \frac{ef}{g}mn$,

& fiet $cfm - cmm - \frac{ef}{g}mn = nn$. Pone $f - m$

$-fn$

$-\frac{f^n}{g} = s$, & erit $cs m = nn$. Divide utramque partem æquationis per $s m$, & orietur $c = \frac{nn}{sm}$. In-

vento autem c , determinata habetur æquatio ad

Conicam sectionem $cf x = c x x + \frac{cf}{g} x y + y y$.

Et inde per methodum Cartesii Conica sectio datur & describi potest.

Atque hætenus varia evolvi Problemata. In scientiis enim addiscendis profunt exempla magis quam præcepta. Qua de causa in his fufius expatiatus sum. Sed & aliqua quæ inter scribendum occurrebant immiscui sine Algebra soluta, ut insinuarem in problematis quæ prima fronte difficilia videantur non semper ad Algebram recurrendum esse. Sed tempus est jam æquationum resolutionem docere. Nam postquam Problema ad æquationem deductum est, radices illius æquationis quæ quantitates sunt Problemati satisfaciennes extrahere oportebit.

Quomodo

Quomodo æquationes resolvendæ sunt.

Postquam igitur in Quæstionis alicujus solutione ad æquationem perventum est, & æquatio illa debite ordinata est & reducta; ubi quantitates quæ per species designantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipsis substituendi sunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem satisfaciet Quæstioni. Ut si in sectione anguli in quinque partes æquales sumendo, r pro radio circuli, q pro subtensa complementi anguli propositi ad duos rectos, & x pro subtensa complementi quintæ partis anguli illius pervenissem ad hanc æquationem $x^5 - 5rx^3 + 5r^4x - r^4q = 0$. Ubi in casu aliquo particulari dantur in numeris radius r , & linea dati anguli complementum subtendens q ; ut quod radius sit 10 & subtensa 3; substituo numeros illos in æquatione pro r & q , & provenit æquatio numeralis $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$, cujus radix tandem extracta erit x , seu linea complementum quintæ partis anguli illius dati subtendens.

De natura radicum Æquationis.

Radix vero numerus est qui si in æquatione pro litera vel specie radicem significante substituatur, efficiet omnes terminos evanescere.

Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, unitas est radix quoniam scripta pro x producit

1 —

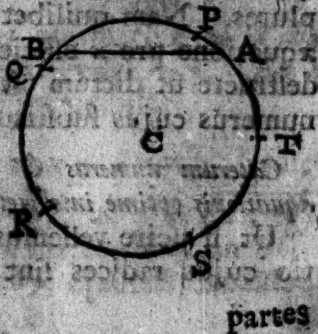
EQUATIONUM NATURA. 241

$1 - 1 - 19 + 49 - 30$, hoc est nihil. Sed æquationis ejusdem plures esse possunt radices. Nam si in hac eadem æquatione $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$, pro x scribas numerum 2, & pro potestatibus x similes potestates numeri 2, producantur $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, hoc est nihil. Atque ita si pro x scribas numerum 3 vel numerum negativum -5 , utroque casu producentur nihil, terminis affirmativis & negativis in hisce quatuor casibus se mutuo destruentibus. Proinde cum numerorum 1, 2, 3, & -5 , quilibet scriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipsius x , efficiendo ut termini omnes æquationis conjungantur æquantur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere posse plures radices, sciendum est plures esse posse solutiones ejusdem Problematis.

Ut si circulorum duorum datorum quaereretur interseccio; dua sunt eorum intersecciones, atque adeo quaestio admittit duo responsa; & penitus æquatio interseccionem determinans habebit duas radices quibus interseccionem utramque determinet, si modo nihil in datis sit quo responsum ad unam interseccionem determinetur.

Sic & si arcus APB pars quinta AP inveniende esset, quamvis animum forte advertas tantum ad arcum APB, tamen æquatio qua quaestio solvetur determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB; APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æque ac quintam partem arcus APB; quæ quinta



partes si divides totam circumferentiam in æquales quinque partes PQ, QR, RS, ST, TP, erunt AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur querendo quintas partes arcuum quos recta AB subtendit ad casus omnes determinandos circumferentia tota secari debet in quinque punctis P, Q, R, S, T, ideo æquatio ad omnes casus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iisdem datis, & per ejusdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem semper æquationem incideris sive quæras quintam partem Arcus APB, sive quintam partem Arcus ASB, sive alterius cujusvis ex arcibus quintam partem. Unde si æquatio qua quinta pars Arcus APB determinatur non haberet plures radices quam unam, dum quærendo quintam partem Arcus ASB incidimus in eandem illam æquationem, sequeretur majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor est, eo quod subtenfa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. In omni igitur problemate necesse est æquationem qua respondetur tot habere radices, quot sunt quæsitæ quantitatis casus diversi ab iisdem datis pendentes & eadem argumentandi ratione determinandi.

Potest vero æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures.

Sic æquatio $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, quatuor habet radices 1, 2, 3, & -5 ; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris scriptus in æquatione pro x efficiet terminos omnes se mutuo destruere ut dictum est; præter hos vero nullus est numerus cujus substitutione hoc eveniet.

Ceterum numerus & natura radicum ex generatione æquationis optime intelligitur.

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint 1, 2, 3, & -5 , supponendum

dum erit x ambigue significare numeros illos, seu esse $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, & $x = -5$, vel quod perinde est, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, & $x + 5 = 0$; Et multiplicando hæc in se, prodibit multiplicatione $x - 1$, in $x - 2$, hæc æquatio $xx - 3x + 2 = 0$, quæ duarum est dimensionum ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x - 3$ prodibit $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, æquatio trium dimensionum totidemque radicum, quæ iterum multiplicata per $x + 5$ fit $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ut supra. Cum igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus, $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, & $x + 5$, in se continuo ductis, ubi factorum aliquis nihil est, quod sub omnibus fit nihil erit; ubi vero horum nullus nihil est, quod sub omnibus continetur nihil esse non potest. Hoc est, non potest $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30$, esse nihilo æquale ut oportet, nisi his quatuor casibus ubi est $x - 1 = 0$, vel $x - 2 = 0$, vel $x - 3 = 0$, vel denique $x + 5 = 0$, proinde soli numeri 1, 2, 3, & -5 valere possunt x seu radices esse æquationis. Et simile est ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari possumus omnes generari, quamvis factores ab invicem secernere solet esse difficillimum, & ipsum est quod æquationem resolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur factores.

Radices vero sunt duplices affirmativæ ut in allato exemplo 1, 2, & 3, & negativæ ut -5 . Ex his vero aliqua non raro evadunt impossibiles.

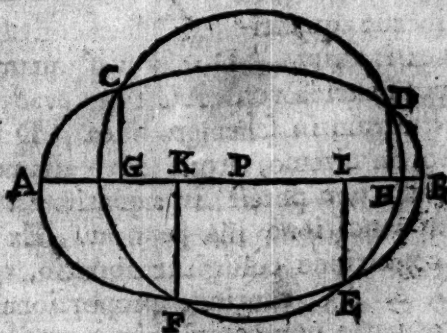
Sic æquationis $xx - 2ax + bb = 0$, radices duæ quæ sunt $a + \sqrt{aa - bb}$, & $a - \sqrt{aa - bb}$ reales quidem sunt ubi aa majus est quam bb , at ubi aa minus est quam bb , evadunt impossibiles

co quod $aa - bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica est impossibilis. Omnis enim radix possibilis sive affirmativa sit, sive negativa, si per seipsam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impossibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento colligitur æquationem $x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0$, unam quidem realem radicem habere quæ est 2, duas vero impossibiles, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his 2, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ scripta in æquatione pro x efficiet omnes ejus terminos se mutuo destruere; sunt vero $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$ numeri impossibiles, eo quod extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præsupponant.

Æquationum vero radices sæpe impossibiles esse æquum est in casus problematum, qui sæpe impossibiles sunt, exhibeam possibiles.

Ut si rectæ & circuli intersectio determinanda esset, & pro circuli radio & rectæ à centro ejus distantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio intersectionem definiens habetur, si pro litera designante distantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, intersectio possibilis erit; sin major, fiet impossibilis; & æquationis radices duæ quæ intersectiones duas determinant, debent esse perinde possibiles vel impossibiles ut rem ipsam vere exprimant. Atque ita si circulus CDEF, & Ellipsis ACBF se mutuo secant in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam positione datam AB, demittantur perpendiculara CG, DH, EI, FK, & querendo longitudinem alicujus e perpendicularis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus secat Ellipsin in quatuor punctis habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor illa

illa perpendiculara. Quod si circuli radius manente centro ejus minuaturs donec punctis E & F coalescentibus circulus tandem tangat Ellipsin, ex radi-



clibus duæ illæ quæ perpendiculara EI & FK jam coincidentia exprimunt evadent æquales. Et si circulus adhuc minuaturs ut Ellipsin in puncto EE ne quidem tangat sed secet tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quæ perpendiculara EI, FK jam facta impossibilia exprimebant, fient una cum perpendicularis illis impossibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus atigendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales deinde impossibiles evadere solent. Et inde fit quod radicum impossibilium numerus semper sit par.

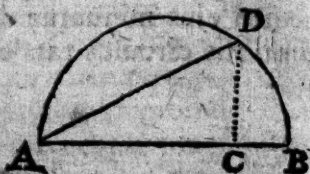
Sunt tamen radices æquationum aliquando possibiles ubi Schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in Schemate quod ad æquationem nil spectat.

Ut si in semicirculo ADB datis diametro AB, & linea inscripta AD, demissoque perpendicularo

DC, quærerem diametri
segmentum AC, foret

$$\frac{AD^2}{AB} = AC. \quad \text{Et per}$$

hanc æquationem AC
realis exhibetur quanti-



tas ubi linea inscripta AD major est quam diame-
ter AB, per Schema vero AC tunc evadit impos-
sibilis. Nimirum in schemate linea AD supponi-
tur inscribi in circulo, atque adeo diametro cir-
culi major esse non potest; in æquatione vero nihil
est quod à conditione illa pendeat. Ex hac sola
linearum conditione colligitur æquatio, quod sint
AB, AD, & AC continue proportionales. Et
quoniam æquatio non complectitur omnes condi-
tiones schematis non necesse est ut omnium condi-
tionum teneatur limitibus. Quicquid amplius est
in schemate quam in æquatione potest illud limi-
tibus arcuare, hanc non item. Qua de causa ubi
æquationes sunt imparium dimensionum, adeoque
radices omnes impossibiles habere non possunt;
schemata quantitativis à quibus radices omnes
pendent sæpe limites imponunt quos transgredi
servatis schematum conditionibus impossibile est.

*Ex radicibus vero quæ reales sunt, affirmativa & ne-
gativa ad plagas oppositas solent tendere.*

Sic in schemate penultimo querendo perpendi-
culum CG incidetur in æquationem cujus duæ
erunt affirmativæ radices CG ac DH à punctis C
& D tendentes versus unam plagam, & duæ nega-
tivæ EI & FK, tendentes à punctis E & F versus
plagam oppositam. Aut si in linea AB ad quam
perpendiculara demittuntur detur aliquod punctum
P, & pars ejus PG à puncto illo data ad perpen-
diculorum aliquod CG extendens queratur, inci-
demus in æquationem quatuor radicum PG, PH,
PI,

PI, PK, quarum quæſita PG, & quæ à puncto P ad easdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ vero tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt, numerus radicum affirmatarum & negativarum ex signis terminorum æquationis cognosci potest. Tot enim sunt radices affirmativæ quot signorum in continua serie mutationes de + in - & - in +; cætera negativæ sunt.

Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi terminorum signa se sequuntur hoc ordine + - - + - variationes secundi - à primo +, quarti + à tertio - & quinti -, à quarto +, indicant tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At ubi radices aliquæ impossibiles sunt regula non valet, nisi quatenus impossibiles illæ quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ pro ambiguis habeantur. Sic in æquatione $x^4 + px^3 + 3ppx - q = 0$, signa indicant unam esse affirmativam radicem & duas negativas. Finge $x = 2p$ seu $x - 2p = 0$, & multiplica æquationem priorem per hanc $x - 2p = 0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, & prodibit

$$\text{hæc æquatio } x^4 - px^3 + ppxx - \frac{6p^3}{q}x + 2pq = 0;$$

quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impossibiles* quæ pro ambiguitate sua priori casu negativæ posteriori affirmativæ esse videntur.

Verum quot radices impossibiles sunt cognoscere potest per hanc regulam.

Constituam seriem fractionum quorum denominatores sunt numeri in hac progressionem 1, 2, 3, 4, 5, &c. pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signum +; sin minus, signum —. Sub primo vero & ultimo termino colloca signum +. Et tot erunt radices impossibiles quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes de + in — & — in +.

Ut si habeatur æquatio $x^3 + pxx + 3ppx - q = 0$: Divido seriei hujus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ fractionum secundam $\frac{1}{2}$ per primam $\frac{1}{2}$, & tertiam $\frac{1}{2}$ per secundam $\frac{1}{2}$, & fractiones prodeuntes $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ colloco super mediis terminis æquationis ut sequitur. Dein

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & pxx & + & 3ppx & - & q = 0 \\ + & - & + & + & + & + & + \end{array}$$

quoniam quadratum secundi termini pxx ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{2}$, nimirum $\frac{ppx}{3}$ minus est quam primi

termini x^3 , & tertii $3ppx$ rectangulum $3ppx$ sub termino pxx colloco signum —. At quia tertii termini $3ppx$ quadratum $9p^2xx$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{2}$, majus est quam nihil, atque adeo multo majus quam secundi termini pxx , & quarti $-q$ rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum +. Dein sub primo termino x^3 & ultimo $-q$ colloco signa +. Et signorum subscriptorum quæ in hac sunt serie + — + + mutationes duæ, una de + in —, alia de — in + indicant duas esse radices impossibiles.

Sic

Sic & æquatio x^3

$$-4xx + 4x - 6 \quad x^3 \quad -4xx + 4x - 6 = 0$$

$= 0$, duas habet

radices impossi-

bles. Æquatio item

$$x^4 - 6xx - 3x \quad x^4 * - 6xx - 3x - 2 = 0$$

$- 2 = 0$, duas

habet. Nam hæc fractionum series $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ divi-

dendo secundam per primam, tertiam per secun-

dam, & quartam per tertiam, dat hanc seriem

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ super mediis æquationis terminis collocan-

dam. Dein secundi termini qui hic nihil est qua-

dratum ductum in fractionem imminuentem $\frac{1}{2}$ pro-

ducit nihil, quod tamen majus est quam rectan-

gulum negativum $-6x^2$ sub terminis utrinque

positis x^4 & $-6xx$ contentum. Quare sub termino

illo deficiente scribo $+$. In cæteris pergo ut in

exemplo superiori; & signorum subscriptorum pro-

dit hæc series $+++ - +$ ubi duæ mutationes

indicant duas radices impossibiles. Et ad eundem

modum in

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$$

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0, \text{ deteguntur impos-}$$

sibiles duæ.

Ubi termini duo vel plures simul defunt, sub

primo terminorum deficientium collocandum est

signum $-$, sub secundo signum $+$, sub tertio

signum $-$, & sic deinceps, semper variando signa,

nisi quod sub ultimo terminorum simul deficien-

tium semper collocandum est signum $+$ ubi ter-

mini deficientibus utrinque proximi habent signa

contraria. Ut in æquationibus $x^5 + ax^4 * * *$

$$+ a^5 = 0, \text{ \& } x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0, \text{ qua}$$

$$+ a^5 = 0, \text{ \& } x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0, \text{ qua}$$

$$+ a^5 = 0, \text{ \& } x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0, \text{ qua}$$

250 EQUATIONUM NATURA.

rum prior quatuor posterior duas habet impossibiles radices. Sic & æquatio

$$\begin{array}{cccccccc} x^7 & - & 2x^6 & + & 3x^5 & - & 2x^4 & + & x^3 & * & * & - & 3 & = & 9 \\ + & - & + & - & + & - & + & - & + & & & & & & \end{array}$$

sex habet impossibiles.

Hinc etiam cognosci potest utrum radices impossibiles inter affirmativas radices latent an inter negativas. Nam signa terminorum signis subscriptis variantibus imminentium indicant tot affirmativas esse impossibiles quot sunt ipsorum variationes, & tot negativas quot sunt ipsorum successiones sine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & - & 2xx & - & 5x & - & 4 & = & 0 \\ + & + & - & + & + & + & & & & & & & \end{array}$$

signis infra scriptis variantibus + - + quibus radices duæ impossibiles indicantur, imminentes termini - 4x⁴ + 4x³ - 2xx, signa habent - + -, quæ per duas variationes indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impossibiles inter affirmativas latebunt. Cum itaque omnium æquationis terminorum signa + - + - - per tres variationes indicant tres esse affirmativas radices, & reliquas duas negativas esse, & inter affirmativas lateant duæ impossibiles, sequitur æquationis unam esse radicem vere affirmativam duas negativas ac duas impossibiles. Quod si æquatio fuisset

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & - & 4x^4 & - & 4x^3 & - & 2xx & - & 5x & - & 4 & = & 0 \\ + & + & - & - & - & + & + & & & & & & \end{array}$$

ex

ex negativis radicibus impossibilem esse. Quomobrem cum æquationis signa + — — — — per unam variationem indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas esse; sequitur unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat.

De transmutationibus Aequationum.

*C*Æterum æquationis cujuscvis radices omnes affirmativæ in negativas & negativæ in affirmativas mutari possunt, idque mutando tantum signa terminorum alternorum.

Sic æquationis $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas mutando tantum signa secundi quarti & sexti termini ut hic fit, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0$. Easdem habet hæc æquatio radices cum priore nisi quod hic affirmativæ sunt quæ ibi erant negativæ, & hic negativæ quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles quæ ibi inter affirmativas latebant hic latent inter negativas, ita ut his deductis restet unica tantum radix vere negativa.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. Possumus enim supponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliquo quantitate utcumque componi, & perinde pro ea sustinere quod aequipollens esse fingitur. Ut si supponamus radicem æqualem esse summæ vel differentie cognitæ
allicu-

252 TRANS MUTATIO

alicujus & incognitæ quantitatis. Nam possumus hoc pacto radices æquationis cognita illa quantitate augere vel diminuere, vel de cognita quantitate subducere; atque ita efficere ut earum aliquæ quæ prius erant negativæ jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, si radices unitate augeri vellem, fingo $x + 1 = y$, seu $x = y - 1$, & perinde pro x scribo in æquatione $y - 1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x similem potestatem de $y - 1$, ad hunc modum.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4. & y^4 - 4y^3 + 6yy - 4y + 1 \\
 -x^3. & -y^3 + 3yy - 3y + 1 \\
 -19xx. & -19yy + 38y - 19 \\
 +49x. & +49y - 49 \\
 -30. & -30
 \end{array}$$

Summa $| y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0.$

Et æquationis prodeuntis $y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0$, radices erunt 2, 3, 4, -4, quæ prius erant 1, 2, 3, -5, unitate jam factæ majores. Quod si pro x scripsissem $y + \frac{1}{2}$ prodidisset æquatio $y^4 + 5y^3 - 10yy - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$, cujus duæ fuissent radices affirmativæ $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ ac duæ negativæ $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero scribendo $y - 6$ prodidisset æquatio cujus radices fuissent 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ, & pro eodem scribendo $y + 4$ radices jam numero quaternario diminutæ evasisent -3, -2, -1, -9, negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices siquæ impossibiles sunt, hæc aliquando facilius deteguntur quam prius. Sic in æquatione $x^3 - 3ax$

$$-3a^2$$

$3a^3 = 0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impossibiles. At si augeas radices quantitate a scribendo $y - a$ pro x , in æquatione resultante $y^3 - 3ayy - a^3 = 0$, radices duæ impossibiles jam per regulam illam detegi possunt.

Eadem operatione possumus etiam secundos terminos æquationum tollere. Hoc enim fiet si cognitam quantitatem secundi termini æquationis propositæ per numerum dimensionum æquationis divisam, subducamus de quantitate quæ pro nova æquationis radice significanda assumitur, & residuum substituamus pro radice æquationis propositæ. Ut si proponatur æquatio $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$, cognitam quantitatem secundi termini quæ est -4 divisam per numerum dimensionum æquationis 3 subduco de specie quæ pro nova radice significanda assumitur, puta de y , & residuum $y + \frac{4}{3}$ substituo pro x , & provenit,

$$\begin{array}{r} y^3 + 4yy + \frac{16}{3}y + \frac{64}{27} \\ - 4yy - \frac{16}{3}y - \frac{64}{27} \\ + 4y + \frac{16}{3} \\ - 6 \\ \hline y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{16}{27} = 0. \end{array}$$

Eadem methodo potest & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4 - 3x^3 + 3xx - 5x - 2 = 0$, & finge $x = y - e$, & substituendo $y - e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$\left. \begin{array}{r} y^4 - 4e y^3 + 6e^2 y^2 - 4e^3 y + e^4 \\ - 3y^3 + 9e y^2 - 9e^2 y + 3e^3 \\ + 3y^2 - 6e y + 3e^2 \\ - 5y + 5e \\ - 2 \end{array} \right\} = 0.$$

Hujus

254 TRANS MUTATIO

Hujus æquationis tertius terminus est $6ee + 9e + 3$ ductum in yy . Ubi si $6ee + 9e + 3$ nullum esset, eveniret ipsum quod volumus. Fingamus itaque nullum esse ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum substitui debet pro e , & habebimus æquationem quadraticam $6ee + 9e + 3 = 0$, quæ divisa per 6 fiet $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, seu $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$, & extracta radice $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}$, seu $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$, hoc est $= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, atque adeo vel $= -\frac{1}{2}$ vel $= -1$. Unde $y - e$ erit vel $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$. Quamobrem cum $y - e$, scriptum fuit pro x , vice $y - e$ debet $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$ scribi pro x , ut tertius æquationis resultantis terminus nullus sit. Et in utroque quidem casu id eveniet. Nam si pro x scribatur $y + \frac{1}{2}$ orietur hæc æquatio $y^4 - y^3 - \frac{1}{4}y - \frac{6}{16} = 0$; sin scribatur $y + 1$, orietur hæc $y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0$.

Possunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractionesque & radicales quantitates aliquando tolli.

Ut si æquatio sit $y^4 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0$, ad tollendas fractiones fingo esse $y = \frac{1}{3}z$, & perinde pro y substituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova $\frac{z^4}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0$, & rejecto terminorum communi denominatore, $z^4 - 12z - 146 = 0$, cujus æquationis radices sunt triplo majores quam ante. Et rursus ad diminuendos terminos æquationis hujus si scribatur $2v$ pro z , prodibit $8v^4 - 24v - 146 = 0$, & divisio omnibus per 8 fiet $v^4 - 3v - 18\frac{1}{4} = 0$, cujus æquationis radices dimidiæ sunt radicum prioris. Et hic si tandem inveni-

inveniat v ponendum erit $2v = z$, $\frac{1}{2}z = y$, & $y + \frac{1}{y} = x$, & æquationis primo propositæ $x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$ habebitur radix x .

Sic & in æquatione $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x scribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$, quæ divis omnibus terminis per $\sqrt{3}$ fit $3y^3 - 2y + 1 = 0$.

Rursus æquationis radices in earum reciprocas transformari possunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci.

Sic æquatio novissima $3y^3 - 2y + 1 = 0$, scribendo $\frac{1}{z}$ pro y evadit $\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0$, seu terminis omnibus multiplicatis per z^3 , & ordine terminorum mutato $z^3 - 2zz + 3 = 0$. Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modo secundus prius tollatur, ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias id fiet si modo tertium prius tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, cujus radices sunt 3, 2, 1, -5, si scribatur $\frac{1}{y}$ pro x resultabit æquatio $\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0$, quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4 ac divis per 30, signisque mutatis, fiet $y^4 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{19}{3}yy - \frac{49}{3}y - \frac{1}{10} = 0$, cujus radices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$; radicum affirmatarum maxima 3 jam conversa in minimam $\frac{1}{3}$, & minima 1 jam facta maxima, & radice negativa -5 quæ om-

omnium maxime distabat à nihilo, jam omnium maxime accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes sed quæ omnes ad exemplum transmutationis illius ubi tertium æquationis terminum sustulimus confici possunt, ut non opus sit hac de re plura dicere. Addamus potius aliqua de limitibus æquationum.

Ex Æquationum generatione constat quod cognita quantitas secundi termini æquationis, si signum ejus mutetur, equalis sit aggregato omnium radicum sub signis propriis; ea tertii equalis aggregato rectangulorum sub singulis binis radicibus; ea quarti si signum ejus mutetur, equalis aggregato contentorum sub singulis terminis radicibus; ea quinti equalis aggregato contentorum sub singulis quaternis; & sic in infinitum.

Assumamus $x = a$, $x = b$, $x = -c$, $x = d$, &c. seu $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, $x - d = 0$, & ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut supra. Jam multiplicando $x - a$ per $x - b$ producetur æquatio $xx - \frac{a}{b}x + ab = 0$; ubi cognita quantitas secundi termini, si signa ejus mutantur, nimirum $a + b$, est summa duarum radicum a & b , & cognita tertii ab illud unicum quod sub utraque continetur rectangulum. Rursus multiplicando hanc æquationem per $x + c$

$$\begin{array}{r} -a \quad +ab \\ \text{producetur æquatio cubica } x^3 - bxx - acx + abc \\ \quad \quad \quad +c \quad -bc \\ = 0, \text{ ubi cognita quantitas secundi sub signis mu-} \\ \text{tatis nimirum } a + b - c \text{ est summa radicum } a, b \\ \text{\& } -c; \text{ cognita tertii } ab - ac - bc, \text{ summa re-} \\ \text{ctangulorum sub singulis binis } a \& b, a \& -c, \\ b \& -c; \text{ \& cognita quarti sub signo mutato} \\ -abc \text{ illud unicum contentum est quod omnium} \end{array}$$

con-

continua multiplicatione generatur, a in b in $-c$.
Adhuc multiplicando cubicam illam æquationem
per $x - d$ producet hęcce quadrato-quadratica

$$\begin{array}{r} + ab \\ - a \quad - ac \quad + abc \\ - b \quad - bc \quad - abd \\ + c \quad + ad \quad + bcd \quad - abcd = 0: \\ - d \quad + bd \quad + acd \\ - cd \end{array}$$

ubi cognita quantitas secundi termini sub signis
mutatis $a + b - c + d$, est summa omnium radi-
cum; ea tertii $ab - ac - bc + ad + bd - cd$
summa rectangulorum sub singulis binis; ea quarti
sub signis mutatis $-abc + abd - bcd - acd$
summa contentorum sub singulis ternis; ea quinti
 $-abcd$ contentum unicum sub omnibus. Et hinc
primo colligimus omnes æquationis cujuscunque,
terminos nec fractos nec surdos habentis, radices
non surdas, & radicum binarum rectangula, ter-
narumque aut plurium contenta esse aliquos ex
divisoribus integris ultimi termini; atque adeo
ubi constiterit nullum ultimi termini divisorum
esse aut radicem æquationis, aut duarum radicum
rectangulum pluriumve contentum, simul consta-
bit nullam esse radicem radicumve rectangulum aut
contentum nisi quod sit surdum.

Ponamus jam cognitæ quantitates terminorum
æquationis sub signis mutatis esse p, q, r, s, t, v , &c.
eam nempe secundi p , tertii q , quarti r , quinti s ,
& sic deinceps. Et signis terminorum probe obser-
vatis fiat $p = a$. $ph + 2q = b$. $pb + qa + 3r = c$.
 $pc + qb + ra + 4s = d$. $pd + qc + rb + sa$
 $+ 5t = e$. $pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f$.
& sic in infinitum, observata serie progressionis.

R

Et

Et erit a summa radicum, b summa quadratorum ex singulis radicibus, c summa cuborum, d summa quadrato-quadratorum, e summa quadrato-cuborum, f summa cubo-cuborum, & sic in reliquis. Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi cognita quantitas secundi termini est -1 , tertii -19 , quarti $+49$, quinti -30 ; ponendum erit $1 = p$, $19 = q$, $-49 = r$, $30 = s$. Et inde orientur $a = (p =) 1$, $b = (pa + 2q = 1 + 38 =) 39$, $c = (pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 =) -89$, $d = (pc + qb + ra + 4s = -89 + 741 - 49 + 120 =) 723$. Quare summa radicum erit 1 , summa quadratorum radicum 39 , summa cuborum -89 , & summa quadrato-quadratorum 723 . Nimirum æquationis illius radices sunt $1, 2, 3$ & -5 , & harum summa $1 + 2 + 3 - 5$ est 1 ; summa quadratorum $1 + 4 + 9 + 25$ est 39 , summa cuborum $1 + 8 + 27 - 125$ est -89 , & summa quadrato-quadratorum $1 + 16 + 81 + 625$ est 723 .

De limitibus Æquationum.

ET hinc colliguntur *limites* inter quos consistunt radices æquationis ubi nulla earum impossibilis est. Nam cum radicum omnium quadrata sunt affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radice major. Et eodem argumento, summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quam quadrato-quadratum radice maximæ, & summa cubo-cuborum major quam cubo-cubus radice maximæ.

Quamobrem si *limitem* desideres quem radices nullæ transgrediantur, quare summam quadratorum radicum & exinde ejus radicem quadratam. Hæc enim radix major

ior est quam radix maxima equationis. Sed ad radicem maximam propius accedens si quas summam quadrato quadratorum & extrahat ipso radice quadrato quadratorum. Et adhuc magis si queras summam cuborum & extrahat ejus radicem cubo cuborum. Et ita in infinitum.

Sic in equatione precedente radix quadratica summae quadratorum radicem, seu $\sqrt{35}$, est $5\frac{1}{2}$ quam proxime, & $8\frac{1}{2}$ magis distat a nihilo quam ipsa radicem 1, 2, 3, 4, 5. At radix quadratica quadratica summae quadrato quadratorum radicem nempe $\sqrt{723}$ quae est $26\frac{1}{2}$ circiter propius accedit ad radicem a nihilo remotissimam 5.

Si inter summam quadratorum & summam quadrato quadratorum radicem inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quam summa cuborum radicem sub signis affirmativis connexorum. Et inde hujus media proportionalis & summa cuborum sub propriis signis, ut prius inventa, semisumma erit major quam summa cuborum radicem affirmativam, & semidifferentia major quam summa cuborum radicem negativarum.

Atque adeo maxima radicem affirmativarum minor erit quam radix cubi illius semisumma. Et maxima radicem negativarum minor quam radix cubi illius semidifferentia.

Sic in equatione precedente media proportionalis inter summam quadratorum radicem 39, & summam quadrato quadratorum 723 est 168 circiter. Summa cuborum sub propriis signis supra erat 85. Hujus & 168 semisumma est 394, semidifferentia 143. Prioris radicis cubi quae est $3\frac{1}{2}$ circiter, major est quam maxima radicem affirmativam 3. Posterioris radix cubi quae est

5. $\frac{1}{2}$ proxime, transcendit radicem negativam — 5. Quo exemplo videre est quam prope ad radicem hac methodo acceditur ubi unica tantum radix negativa est vel unica affirmativa. Et tamen propius adhuc accederetur, si inter summam quadrato quadratorum radicem & summam cubo-cuborum mediam proportionalis inveniretur atque ex hujus, & summe quadrato-cuborum radicem semisumma & semidifferentia radices quadrato cubice extraherentur. Nam radix quadrato-cubica semisumma transcederet maximam radicem affirmativam, & radix quadrato-cubica semidifferentia maximam seu extremam negativam, sed excessu multo minore quam ante. Cum igitur radix quaelibet, augendo vel diminuendo radices omnes fieri potest minima, dein minima in maximam converti, & postea omnes præter maximam fieri negativæ, constat quomodo radix imperata quam proxime potest obtineri.

Si radices omnes præter duas negativas sunt; possunt illæ duas simul hoc modo erui.

Inventa juxta methodum præcedentem summa cuborum duarum illarum radicum, ut & summa quadrato-cuborum & summa quadrato-quadrato-cuborum radicum omnium; inter posteriores duas summas quære mediam proportionalem, & ea erit differentia inter summam cubo-cuborum radicem affirmativarum, & summam cubo-cuborum radicem negativarum quam proxime; adeoque hujus medię proportionalis & summe cubo-cuborum radicum omnium semisumma erit summa cubo-cuborum radicem affirmativarum, & semidifferentia erit summa cubo-cuborum radicem negativarum. Habito igitur tum summa cuborum, tum summa cubo-cuborum radicem duarum affirmativarum, de duplo summe posterioris aufer quadratum summe prioris, & reliqui radix quadratica

tica erit differentia cuborum duarum radicum. Habita vero tum summa tum differentia cuborum habentur cubi ipsi. Extrahe eorum radices cubicas & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quam proxime. Et si in altioribus potestatibus opus consimile institueretur magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes ob difficilem calculum minus usui sunt, & ad æquationes tantum extendunt quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites alia ratione invenire jam docebo quæ & facilior sit & ad omnes æquationes extendat.

Multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius, & factum dividatur per radicem æquationis. Et sic pergatur semper multiplicando per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes destruantur quorum signa diversa sunt à signo primi seu altissimi termini præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major, qui in terminis prodeuntibus scriptus præ radice, efficit eorum qui singulis vicibus per multiplicationem producebantur aggregationem ejusdem semper esse signi cum primo seu altissimo termino æquationis.

Ut si proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$. Hanc primum sic multiplico

$$\begin{array}{r} 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120. \end{array}$$

Dein terminos prodeuntis divisos per x rursus multiplico sic

$$\begin{array}{r} 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63, \end{array}$$

& terminos prodeuntis rursus dividendo per x prodeunt $20x^3 + 24xx - 60x + 60$, quos minuendi gratia divido per maximum divisorem 4 & fiunt

$5x^2 - 6xx - 15x + 15$. Hi itidem multiplicati per progressionem 3. 1. 1. 0, & divisi per x fiunt $15xx - 12x - 15$, & rursus divisi per 3 fiunt $5xx - 4x - 5$. Et hi multiplicati per progressionem 3. 1. 0, & divisi per x fiunt $5x - 2$. Jam cum terminus æquationis altissimus x^3 affirmativus sit, tento quinam numerus scriptus in his productis pro x , efficiet ea omnia affirmativa esse. Et quidem tentando 13, fit $5x - 2 = 3$ affirmativum sed $5xx - 4x - 5$, fit -4 negativum. Quare licet erit major quam 1. Tento itaque numerum aliquem majorem puta 2. Et in singulis substituendo 2 pro x , evadunt

$$\begin{aligned} 5x^2 - 6xx - 15x + 15 &= 8 \\ 15xx - 12x - 15 &= 7 \\ 5xx - 4x - 5 &= 1 \\ 5x^2 - 6xx - 15x + 15 &= 11 \\ 5x^2 - 8x^2 - 30xx + 60x + 63 &= 79 \\ 5x^2 - 4x^2 - 10xx + 30xx + 63x - 120 &= 40 \end{aligned}$$

Quare cum numeri procedentes 8. 7. 1. 11. 79. 40, sint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quam radicem affirmativarum maxima. Similiter si limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel quod perfido est mutosigna terminorum alternorum & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum signis, quantitates in quibus numeri substituendi sunt fiunt

$$\begin{aligned} 5x^2 + 2 &= 0 \\ 5xx + 4x - 5 &= 0 \\ 5xx + 6xx - 15x - 15 &= 0 \\ 5x^2 + 8x^2 - 30xx - 60x + 63 &= 0 \\ x^2 + 2x^2 - 10x^2 - 30xx + 63x + 120 &= 0 \end{aligned}$$

Ex his seligo quantitatem aliquam ubi termini negativi maxime prevaleant videntur, puta $5x^2 + 8x^2$

— $30x^2 - 60x + 63$, & hic substituendo pro x numeros 1 & 2 prodeunt numeri negativi — 14 & — 33. Unde limes erit major quam — 2. Substituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et similiter in cæteris quantitatibus substituendo numerum 3 pro x prodit semper numerus affirmativus. Id quod ex inspectione sola colligere licet. Quare numerus — 3 transcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & — 3 inter quos radices omnes consistunt.

Horum vero limitum inventio usui est cum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum surdarum ex ipsis; ne forte radicem extra hos limites aliquando queramus. Sic in æquatione novissima si radices rationales, siquas forte habeat, invenire vellem; ex superioribus certum est has non alias esse posse quasi divisores ultimi termini æquationis, qui hic est 120. Proinde tentando omnes ejus divisores, si nullus eorum scriptus in æquatione pro radice x efficeret omnes terminos evanescere; certum est æquationem non admittere radicem nisi quæ sit surda. At ultimi termini 120, divisores permulti sunt, nimirum 1. — 1. 2. — 2. 3. — 3. 4. — 4. 5. — 5. 6. — 6. 8. — 8. 10. — 10. 12. — 12. 15. — 15. 20. — 20. 24. — 24. 30. — 30. 40. — 40. 60. — 60. 120. & — 120. Et hos omnes divisores tentare, ratio esset. Cognito autem quod radices inter limites 2 & — 3 consistunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit divisores tentare nisi qui sunt inter hos limites, nimirum divisores 1, — 1, & — 2. Nam si horum nullus radix est, certum est æquationem non habere radicem nisi quæ sit surda.

Æquationum reductio per divisores surdos.

Hactenus reductionem æquationum tradidi quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurium dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel quod perinde est, tentandum erit annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit ut ex utraque radix extrahatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

Dispone æquationem secundum dimensiones literæ altius, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nibilo, & terminus altissimus affirmativo signo afficiatur. Deinde si æquatio quadratica sit (nam & hunc casum ob rei analogiam adicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognita quantitatis termini medii.

Ut si æquatio sit $xx - ax - b = 0$, aufer utrobique $-b$ & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$, & extracta utrobique radix fiet $x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, sive $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$.

Quod si æquatio sit quatuor dimensionum, sit ea $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, ubi p, q, r , & s , denotant cognitæ quantitates terminorum æquationis signis propriis adfectas. Fac

$$q - \frac{1}{4}pp = a, \quad r - \frac{1}{2}ap = \beta, \\ s - \frac{1}{4}aa = \zeta.$$

Dein

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β & 2ζ divisorem, integrum, & non quadratum, qui ζ impar esse debet & per 4 divisus unitatem relinquere, si terminorum p & r alteruter sit impar. Pone etiam pro k divisorem aliquem quantitatis $\frac{\beta}{n}$ si p sit par; vel imparis

divisoris dimidium si p sit impar; vel nihil, si dividuum β sit nihil. Ausfer Quotum de $\frac{1}{2}pk$, & reliqui dimidium dic l . Dein pro Q pone $\frac{a + nkk}{2}$, & tenta

si n dividat $QQ - s$, & Quoti radix sit rationalis & aequalis l . Si hoc contigerit ad utramque partem equationis adde $nkkxx + 2nklx + nll$, & radicem extrahes utrobique, prodeunte $xx + \frac{1}{2}px + Q = n\frac{1}{2}$ in $kx + l$.

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^2 + 12x - 17 = 0$, & quia p & q hic defunt, & r est 12, & s est -17, substitutis hisce numeris fiet $a = 0$, $\beta = 12$, & $\zeta = -17$, & ipsorum β & 2ζ seu 12 & -34 communis divisor unicus, nimirum 2, prit n . Porro $\frac{\beta}{n}$ est 6, & ejus divisores 1, 2, 3, & 6 successive tentandi sunt pro k , & -3, -1, -1, -1, & $-\frac{1}{2}$ pro l respective. Est autem $\frac{a + nkk}{2}$ id est kk

æquale Q . Est & $\sqrt{QQ - s}$, id est $\sqrt{QQ + 17} = l$. Ubi numeri pares 2 & 6 scribuntur pro k , Q fit 4 & 36, & $QQ - s$ numerus erit impar adeoque dividi non potest per n seu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi sunt. Ubi vero 1 & 3 scribuntur pro k , Q fit 1 & 9, & $QQ - s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi possunt per n , & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7 : quarum tamen sola -3 congruit cum l . Pono itaque

quo $k = 1$, $l = -3$, & $Q = 1$, & quantitatem
 $xxx + 2kx + l$, id est $xxx - 12x + 18$,
 addo ad utramque partem equationis, & prodit
 $x^4 + 2xx + 1 = 2xx - 12x + 18$, & extracta
 trobique radice, $xx + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$. Quod
 si radicis extractionem effugere malueris pone

$xx + \frac{2}{3}px + Q = \sqrt{u} \times kx + l$, & invenietur ut
 ante $xx + 1 = \pm \sqrt{2} \times x - 3$. Et ex hac æqua-
 tione si radices iterum extrahas proveniet $x =$

$\pm \sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 3} + 3\sqrt{2}$, h. e. secundum signorum

variationes, $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$, & $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $-\sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Item $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{-3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$,

& $x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{-3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Quæ quidem
 quatuor sunt radices equationis sub initio propo-
 sitæ $x^4 + 12x - 17 = 0$. Sed earum ultimarum due
 sunt impossibiles.

Proponamus jam æquationem $x^4 - 6x^3 - 58xx$
 $- 114x + 11 = 0$, & scribendo $a = 3$, $b = 58$, $c = 114$,
 & -11 pro p , q , r , & s respective, orietur $-67 = a$,
 $-315 = b$, & $-1133 = c$. Numerorum a &
 b , seu -315 & -1133 , communis divisor est

unicus 3, adeoque hic erit u , & ipse $\frac{b}{u}$ seu
 -195 divisores sunt, 3, 5, 7, 13, 21, 35, & 105,
 qui itaque tentandi sunt pro k . Quare tento pri-
 mum 3, & quatum -35 qui prodit dividendo
 $\frac{b}{k}$ per k seu -105 per 3, subduco de $\frac{2}{3}pk$, seu
 -3×3 , & restat 16; cuius dimidium 8 esse
 debet

debet l . Sed $\frac{a + nkk}{2}$, seu $\frac{-67 + 27}{2}$ id est -20 erit Q , & $QQ - s$ erit 411 , qui dividi potest per n seu 3 , sed quoti 137 radix non potest extrahi. Quamobrem rejicio 3 & tento 5 pro n .

Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{Q}{n}$ per h , seu -105 per 5 , est -21 , & hunc subducendo de $\frac{1}{2}pk$ seu -3×5 restat 6 , cujus dimidium 3 erit l .

Est & Q seu $\frac{a + nkk}{2}$ id est $\frac{-67 + 75}{2}$ numerus 4 .

Et $QQ - s$, seu $16 + 11$ dividi potest per n , & Quoti, qui est 9 , radix extracta 3 congruit cum l . Quamobrem concludo esse $l = 3$.

$k = 5$, $Q = 4$, & $n = 3$, & si $nkkxx + 2nk/x + n/l$, id est $75xx + 90x + 27$ ad utramque partem equationis addatur, radicem utrobique extrahi posse, & prodire $xx + \frac{1}{3}px + Q = \sqrt{n}$

$nkk + l$, seu $xx - 13x + 4 = \pm \sqrt{9} \times 5x + 3$, &

extracta iterum radice $x = \frac{3 \pm 5\sqrt{3} \pm \sqrt{1 \pm 3\sqrt{3}}}{2}$.

Haud secus si proponatur æquatio hæce $x^4 - 9x^3 + 15xx - 27x + 9 = 0$, scribendo -9 , $+15$, -27 , & $+9$, pro p , q , r , & s respective, emerget $-\frac{3}{4} = a$, $-\frac{50}{4} = b$, & $\frac{27}{4} = c$. Ipsorum b & $2c$, seu $-\frac{50}{2}$ & $\frac{27}{2}$ communes divisores sunt 3 , 5 , 9 , 15 , 27 , 45 , & 135 ; sed 9 quadratus est, & 3 , 15 , 27 , 135 divisi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob impari terminum oporteret. His itaque rejectis restant soli 5 & 45 tentandi pro n . Ponamus primo $n = 5$, & ipsius $\frac{b}{n}$ seu $-\frac{10}{1}$ divisores impares dimidiati nempe $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, tentandi erunt pro

pro k . Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{1}{2}$ qui prodit
dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k , subductus de $\frac{1}{2}pk$ seu $-\frac{1}{2}$ re-
linquit 18 pro $2l$, & $\frac{a + nkk}{2}$ seu -2 est Q , &

$QQ - 5$, seu -5 dividi quidem potest per n seu
 5 , sed Quoti negativi -1 radix impossibilis est,
quæ tamen deberet esse 9 . Quare concludo k
non esse $\frac{1}{2}$, & tento jam si sit $\frac{1}{3}$. Quotum qui
oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k seu $-\frac{1}{3}$ per 2 nempe

pe Quotum $-\frac{1}{3}$ subduco de $\frac{1}{2}pk$ seu $-\frac{1}{3}$
& restat 0 . Unde l jam nihil erit. Est autem
 $\frac{a + kkk}{3}$ seu 3 equalis Q , & $QQ - 5$ nihil est;

unde rursus l , qui hujus $QQ - 5$ divisi per n ra-
dix est, invenitur nihil. Quamobrem his ita qua-
drantibus concludo esse $n = 5$, $k = \frac{1}{3}$, $l = 0$, &
 $Q = 3$, adeoque addendo ad utramque partem
æquationis propositæ terminos $nkkxx + 2nlkx$
 $+ nll$ id est $\frac{1}{3}xx$, & radicem quadraticam utro-
bique extrahendo prodire $xx + \frac{1}{3}px + Q =$
 $\sqrt{n \times kx + l}$, id est $xx + \frac{1}{3}x + 3 = \sqrt{5 \times \frac{1}{3}x}$.

Eadem methodo reducuntur etiam æquationes literales.

Ut si fuerit $x^4 - 2ax^3 + 2a^2xx - 2a^3x + a^4 = 0$,
substituendo $-2a$, $2a^2 - cc$, $-2a^3$ & a^4
pro p , q , r , & s respective, obtinebuntur $aa - cc = a$,
 $-acc - a^3 = b$, & $\frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}a^2cc - \frac{1}{2}cc^2 = c$.
Quantitatum β & γ divisor communis est $aa + cc$
qui proinde erit n , & $\frac{\beta}{n}$ seu $-a$ divisores habet
 1 & a . Sed quia n duarum est dimensionum, &
 $k \sqrt{u}$ non nisi unius esse debet, ideo k nullus erit,

adeo-

adeoque non potest esse a . Sit ergo $k = 1$, & di-
vilo $\frac{p}{n}$ per k aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$ seu $-a$

& restabit nihil pro l . Potro $\frac{a+pk}{n}$ seu aa est

Q & $Q Q -$, seu $a^2 - a^2$ nihil est; & inde
rursus prodit nihil pro l . Quod arguit quantita-
tes n, k, l , & Q recte inventas esse; & additis ad
utramque partem aequationis proposita terminis
 $pkxx + 2nklx + nll$, id est $aa xx + ccxx$,
radicem utrobique extrahi posse, & extractione

illa prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n \times kx + l}$, id
est $xx - ax + aa = \sqrt{x \sqrt{aa + cc}}$. Et extra-
da iterum radice $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} +$ vel
 $-\sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{4}aa \pm \frac{1}{2}a \sqrt{aa + cc}}$.

Haecenus regulam applicui ad extractionem re-
dicum *surdarum*: potest tamen eadem ad extractio-
nem etiam *rationalium* applicari, si modo pro quan-
titate x usurpetur unitas; eoque pacto una vice
examinare possumus utrum aequatio fractis & sur-
dis terminis carens divisorem aliquem duarum di-
mensionum aut rationalem aut surdum admittat.
Uc si aequatio $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$
proponatur, substituendo $1, -5, +12, & -6$,
pro p, q, r , & s respective inveniemur $-5 \div 1 = -5$,
 $9 \div 1 = 9$, & ponendo $x = 1$, Quantitatis $\frac{p}{n}$ seu $\frac{1}{4}$ di-

visores sunt $1, 3, 5, 15, 25, 75$: quorum dimidia
(liquidem p sit impar) tentanda sunt pro k . Et
si pro k tentemus $\frac{1}{4}$, fiet $\frac{1}{4}pk - \frac{p}{n} = -5$. &
ejus

ejus dimidium $\frac{1}{2} = l$. Item $\frac{n + nkk}{2} = \frac{1}{2} = Q$

& $\frac{QQ - 1}{4} = 6\frac{1}{2}$, cujus radix congruit cum l .

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q recte inventas esse, & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $6\frac{1}{2}xx + 2 \cdot 2\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$, radicem utrobique extrahi posse, & extractione illa prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \frac{1}{2}\sqrt{2} \times kx + l$, id est $xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \times 2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$, seu $xx - 3x + 3 = 0$, & $xx + 2x - 2 = 0$, adeoque per hæcæ duas æquationes quadraticas, æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditius inveniuntur per aliam methodum supra traditam.

Siquando quantitas Q multi sunt divisores ita ut omnes pro l tentare molestum fuerit, potest eorum numerus cito minui querendo omnes divisores quantitatæ Q . Nam horum alicui aut imparis alicujus dimidio debet quantitas Q equalis esse. Sic in exemplo novissimo $Q = \frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}$, è cujus divisoribus $1, 3, 9$ aut iisdem dimidiatis $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$, aliquis debet esse Q . Quare sigillatim tentando

quantitatæ $\frac{Q}{2}$ divisores dimidiatos $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}$,

& pro l rejicio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + nkk$, seu $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}kk$, id est Q esse aliquem è numeris $1, 3, 9, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$, &c. pro l , prodantur respective $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{9}{2}$, &c. pro Q , è quibus soli $-\frac{1}{2}$ & $+\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, $1, 3, 9, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}$, adeoque,

adeoque, ceteris reiectis, aut erit $k = \frac{1}{2}$, & $Q = \frac{1}{2}$ aut $k = \frac{1}{3}$, & $Q = \frac{1}{3}$. Quid duo casus examinetur. Atque hactenus idæ æquationibus quatuor dimensionum, quæ quævis ostendit, inveniuntur.

Si æquatio sex dimensionum reducenda est, sit ea $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$, & fac

$$q - \frac{1}{2}pp = a, \quad r - \frac{1}{2}pa = \beta, \quad s - \frac{1}{2}p\beta = \gamma.$$

$$t - \frac{1}{2}av = \zeta, \quad \frac{1}{2}a\beta = \eta, \quad v - \frac{1}{2}\beta\beta = \theta.$$

$$\zeta\theta - \frac{1}{4}\eta^2 = \lambda.$$

Dein sumatur pro n , communis aliquis terminorum 2ζ , & 2θ divisor integer & non quadratus, nec per numerum quadratum divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modo terminorum p, r, t aliquis sit impar. Pro k sumatur divisor aliquis integer quantitatis

si p sit par, vel divisoris imparis dimidium si p sit impar, vel nihil si p nihil sit. Pro Q quantitas $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}n k$. Pro R divisor aliquis quantitatis

$\frac{Qr - QQp - \frac{1}{2}a^2}{n}$ si Q sit integer; vel divisoris imparis dimidium si Q sit fractus denominatorem habens numerum n ; vel nihil si dimidium istud $\frac{Qr - QQp - \frac{1}{2}a^2}{n}$ sit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + n k$. Deinde tenta si $RR - v$ dividi possit per n , & Quoti radix extrahatur; & præterea si radix ista æqualis sit eam quantitatem

$\frac{QR - \frac{1}{2}a^2}{n}$ quam quantitas $\frac{QQ + pR}{n}$ Si hæc omnia eveniant, dic radicem illam m ; & vice æquationis propositæ scribe hanc $x^6 + Qx^4 + R = \pm \sqrt{n} x k x x + tx + m$. Etenim hæc

Si hæc omnia eveniant, dic radicem illam m ; & vice æquationis propositæ scribe hanc $x^6 + Qx^4 + R = \pm \sqrt{n} x k x x + tx + m$. Etenim hæc

Si hæc omnia eveniant, dic radicem illam m ; & vice æquationis propositæ scribe hanc $x^6 + Qx^4 + R = \pm \sqrt{n} x k x x + tx + m$. Etenim hæc

hec æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producit æquationem propositam. Quod si ea omnia in nullo casu evenerint, reductio erit impossibilis, si modo prius constet æquationem per divisorem rationalem reduci non posse.

Exempli gratia, proponatur æquatio $x^6 - 2ax^5$
 $- 2abbx^4 + 2abbx^3 + 2a^3b^2x^2 + 3aabb^2x - a^4bb = 0$,
 $- 4ab^3$

& scribendo $- 2a$, $+ 2bb$, $+ 2abb$, $- 2aabb$
 $+ 2a^3b - 4ab^3$, & $3aabb^2 - a^4bb$ pro p , q , r ,
 s , t , & v respective, prodibunt $2bb - aa = a$,
 $4abb - a^3 = b$, $2a^3b + 2aabb - 4ab^3 - a^4 = y$,
 $- b^4 + 2a^3b + 3aabb - 4ab^3 - \frac{1}{2}a^4 = z$,
 $-\frac{1}{2}a^4 + 3a^3bb - 4ab^3 = u$, & $-aab^4 + a^4bb$
 $-\frac{1}{2}a^4 = t$. Et terminorum $2z$, y , & $2t$ communis
divisor est $aa - 2bb$, seu $2bb - aa$ perinde ut aa
vel $2bb$ majus sit. Sed esto aa majus quam $2bb$,
& $aa - 2bb$ erit n . Debet enim n semper affir-

mativum esse. Porro $\frac{Q}{n}$ est $-\frac{1}{2}aa + 2ab + \frac{1}{2}bb$,

$\frac{p}{n}$ est $-\frac{1}{2}a^3 + 2abb$, & $\frac{q}{n}$ est $-\frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}aabb$,

adeoque $\frac{r}{n} \times \frac{p}{n} - \frac{q}{n}$ seu $\frac{\lambda}{2nn}$ est $\frac{1}{2}a^6 - \frac{1}{2}a^5b$

$-\frac{1}{2}a^4bb + \frac{1}{2}a^3b^2 - \frac{1}{2}aabb^2$, cujus divisores
sunt 1 , a , aa , sed quia $\sqrt{n} \times k$ non nisi unius
dimensionis esse potest, & $\sqrt{n}$ unius est, ideo
 k nullius erit; proinde non nisi numerus esse
potest. Quare rejectis a & aa , restat solum 1
pro k . Preterea $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q ,

& $\frac{Qr - QQp}{n}$ etiam nihil est; adeoque 1 ,

qui

qui ejus divisor esse debet, erit nihil. Denique
 $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$ dat abb pro R . Et $RR - v$,
 est $-2aab^2 + a^2bb$, quod dividi potest per n
 seu $aa - 2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, &
 radix illa negative sumpta, nempe $-ab$, indefini-
 tz quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}r}{n}$ seu $\div$ non est inæqualis,

quantitati vero definitz $\frac{QQ + pR - nll - \frac{1}{2}r}{2nk}$ x:
 qualis est. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m ,
 & loco æquationis propositz scribi potest $x^3 + \frac{1}{2}pxx$

$+ Qx + R = \sqrt{n \times kxx + lx + m}$, i.e. $x^3 - axx$
 $+ abb = \sqrt{aa - 2bb \times xx - ab}$. Cujus conclu-
 sionis veritatem probare potes quadrando partes
 æquationis inventz & auferendo terminos ad dex-
 tram ex utraque parte. Ea enim operatione pro-
 duceretur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3$
 $- 2aabbxx + 2a^2bxx - 4ab^2xx + 13aabb$
 $- a^2bb = 0$, quæ reducenda proponebatur.

Si æquatio est octo dimensionum fit ea $x^8 + px^7$
 $+ qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vxx + wx + z = 0$,
 & fiat $q - \frac{1}{2}pp = a$. $r - \frac{1}{2}pa = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta = \frac{1}{2}aa = \gamma$.
 $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}a\beta = \delta$. $v - \frac{1}{2}a\gamma - \frac{1}{2}\beta\beta = \epsilon$. $w - \frac{1}{2}\delta\gamma = \zeta$.
 & $z - \frac{1}{2}\gamma\gamma = \eta$. Et terminorum 2 δ , 2 ϵ , 2 ζ , 8 η ,
 quare communem divisorem qui integer sit, &
 non quadratus nec per quadratum divisibilis, qui-
 que etiam per 4 divisus relinquat unitatem, si
 modo terminorum alterorum p , r , t , w aliquis sit
 impar. Si nullus est ejusmodi divisor communis,
 certum est æquationem per extractionem surdæ ra-
 dicis quadraticæ reduci non posse, & si non potest
 ea ita reduci, vix occurret illarum omnium qua-
 tuor quantitatum divisor communis. Opusculum
 igitur hætenus institutum examinatio quædam est
 utrum æquatio reducibilis sit necne, adeoque cum

ejusmodi reductiones raro possibiles sunt, finem operi ut plurimum imponet.

Et simili ratione si æquatio sit decem, duodecim, vel plurium dimensionum, impossibilitas reductionis cognosci

Ut si ea sit $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{2}pp = a$, $r - \frac{1}{2}pa = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}aa = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}a\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}a\gamma - \frac{1}{2}\beta\beta = \epsilon$, $w - \frac{1}{2}p\epsilon - \frac{1}{2}a\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}p\zeta - \frac{1}{2}a\epsilon - \frac{1}{2}\beta\delta = \eta$, $c - \frac{1}{2}p\eta - \frac{1}{2}a\zeta = \theta$, $d - \frac{1}{2}p\theta = \lambda$, & querendus communis divisor terminorum quinque 2, 3, 4, 5, 6, qui integer sit & non quadratus, quinque etiam per 4 divisus relinquat unitatem si modo terminorum alterorum p, r, s, a, γ aliquis sit impar.

Si æquatio sit duodecim dimensionum æquatio sit $x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{2}pp = a$, $r - \frac{1}{2}pa = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}aa = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}a\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}a\gamma - \frac{1}{2}\beta\beta = \epsilon$, $w - \frac{1}{2}p\epsilon - \frac{1}{2}a\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}p\zeta - \frac{1}{2}a\epsilon - \frac{1}{2}\beta\delta = \eta$, $c - \frac{1}{2}p\eta - \frac{1}{2}a\zeta = \theta$, $d - \frac{1}{2}p\theta - \frac{1}{2}a\eta = \lambda$, $e - \frac{1}{2}p\lambda = \mu$, & querendus communis divisor integer & non quadratus terminorum sex 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, qui per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum alterorum $p, r, s, a, \gamma, \epsilon$ aliquis sit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio proposita semper per extractionem radice radicis quadraticæ irreducibilis erit ubi ejusmodi divisor communis nullus est. Siquando vero ejusmodi divisor n inventus spem faciat futuræ reductionis, potest ea institui insistendo vestigiis operis quod in æquatione octo dimensionum subjungimus.

Quare

Quæro numerum quadratum cui per n multiplicato ultimus æquationis terminus z , sub signo proprio adnexus quadratum numerum efficit. Id autem expedito fiet si ad z ubi n est par vel ad $4z$ ubi n est impar successive addantur $n, 3n, 5n, 7n, 9n, 11n$, & deinceps donec summa equalis fiat numero alicui in tabula numerorum quadratorum quam ad manus esse suppono. Et si nullus ejusmodi quadratus numerus prius occurrit quam summa illius radix quadratica aucta radice quadratica excessus illius summe supra ultimum æquationis terminum, quadruplo major sit quam maximus terminorum æquationis propositæ p, q, r, s, t, u , &c. non opus erit rem ultra tenere. Æquatio enim soluci non potest. Sed si ejusmodi numerus quadratus prius occurrit, sit ejus radix S , si n est par, vel $1/2 S$ si n est impar; & $\sqrt{\frac{SS - z}{n}}$ dic b . Debeant autem a & b esse numeri integri si n est par, at si n impar est, possunt esse fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et si alius eorum fractus est, alter fractus esse debet. Quod idem de numeris R & n , Q & l , p & k , post invenientis observandum est. Et omnes numeri S & b , qui intra præfactum limitem inveniri possunt in catalogum referendi sunt.

Postea pro k tentandi sunt omnes numeri successive qui non efficiunt $n k \pm p$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & ponendum est in omni casu $\frac{n k k + a}{2} = Q$. Dein pro l tentandi sunt successive numeri omnes qui non efficiunt $n l \pm Q$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & in omni tentamine ponendum $\frac{-n p k k + 2\beta}{4} + n k l = R$. Denique pro m

tentandi sunt successive omnes numeri qui non efficiunt $nm + R$ quadruplo majus quam maximus terminorum æquationis, & videndum an in casu quovis si fiat $QQ - pR + nll = 2H$, & $H + nkm = S$, sit S aliquis numerorum qui prius pro S in Catalogum relati erant; & præterea si alter numerus ei S respondens, qui pro b in eundem Catalogum relatus erat sit his tribus $2RS - w$

$$2QS + RR - v - nmm \quad \& \quad PS + 2QR - t - 2nlm$$

æqualis. Si hæc omnia in aliquo casu evenerint, vice æquationis propositæ scribenda erit hæc $x^4 + px^3$

$$+ Qxx + Rx + S = \sqrt{n \times k} x^2 + lxx + m x + b.$$

Exempli gratia proponatur æquatio $x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x + 5 = 0$.

$$\text{Et erit } q - \frac{1}{4}pp = -1 - 4 = -5 = a. \quad r - \frac{1}{4}pa = -10$$

$$+ 10 = 0 = b. \quad s - \frac{1}{4}p^2 = -\frac{1}{4}16 = -4 = c. \quad t - \frac{1}{4}pa = -10$$

$$+ 10 = 0 = d. \quad u - \frac{1}{4}p^2 = -\frac{1}{4}16 = -4 = e. \quad v - \frac{1}{4}pa = -10$$

$$+ 10 = 0 = f. \quad w - \frac{1}{4}p^2 = -\frac{1}{4}16 = -4 = g. \quad x - \frac{1}{4}pa = -10$$

$$+ 10 = 0 = h. \quad y - \frac{1}{4}p^2 = -\frac{1}{4}16 = -4 = i. \quad z - \frac{1}{4}pa = -10$$

$$+ 10 = 0 = k. \quad \text{Ergo } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

$$\text{respective, sunt } -5, -\frac{10}{2}, -\frac{20}{4}, \& -\frac{10}{1}, \& \text{ eorum divisor communis } 5, \text{ qui per } 4 \text{ divisus relinquit } 1, \text{ perinde ut ob terminum imparem } s \text{ oportuit.}$$

$$\text{Cum itaque inventus sit divisor communis } n \text{ seu } 5 \text{ qui spem facit futuræ reductionis, quoniam iste impar est, ad } 4z \text{ seu } -20 \text{ successive addo } n, 3n,$$

$$5n, 7n, 9n, \&c. \text{ seu } 5, 15, 25, 35, 45, \&c. \& \text{ prodeunt } -15, 0, 25, 60, 105, 160, 225, 300, 385,$$

$$480, 585, 700, 825, 960, 1105, 1260, 1425, 1600.$$

$$\text{Ex quibus solum } 0, 25, 225, \& 1600 \text{ quadrati sunt.}$$

$$\text{Quare horum radices dimidiatae } 0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 20, \text{ in}$$

$$\text{catalogum referendæ sunt pro } S, \& \sqrt{\frac{SS - z}{n}}, \text{ id}$$

est

est 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, 9, respective pro h . Sed quia $S \pm nk$ si scribatur 20 pro S & 9 pro h , fit 65 numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos solum refero in tabulam ut sequitur.

$b \mid 1. \frac{1}{2}. \frac{7}{8}.$

$S \mid 0. \frac{1}{2}. \frac{1}{4}.$

His ita dispositis, tento pro k numeros omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}p \pm nk$ seu $2 \pm 5k$ majus quadruplo maximi termini æquationis 40, id est numeros $-8. -7. -6. -5. -4. -3. -2. -1. 0. 1. 2.$

$3. 4. 5. 6. 7.$ ponendo $\frac{nk^2 + a}{2}$ seu $\frac{5k^2 - 5}{2}$ id est

numeros $\frac{3}{2}. \frac{1}{2}. 120. \frac{17}{2}. 60. \frac{7}{2}. 20. \frac{1}{2}. 0. -\frac{1}{2}. 0.$

$\frac{13}{2}. 20. \frac{7}{2}. 60. \frac{17}{2}. 120.$ respective pro Q . Imo

vero cum $Q \pm nk$, & multo magis Q non debeat

majus esse quam 40, rejiciendos esse sentio $\frac{3}{2}. 120.$

$\frac{17}{2}$ & 60, & qui his respondent $-8. -7. -6.$

$-5. 5. 6. 7.$ adeoque solos $-4. -3. -2. -1. 0.$

$1. 2. 3. 4$ pro k & $\frac{7}{2}. 20. \frac{1}{2}. 0. -\frac{1}{2}. 0. \frac{1}{2}. 20.$

$\frac{7}{2}$ pro Q respective tentandos. Tentemus autem

-1 pro k & 0 pro Q , & in hoc casu pro l ten-

tandi deinceps erunt successive omnes numeri qui

non efficiunt $Q \pm nl$ majus quam 40, id est omnes

numeri inter 10 & -10 , & pro R respective nu-

meri $\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl$ seu $-5 - 5l$ id est $-55.$

$-50. -45. -40. -35. -30. -25. -20. -15.$

$-10. -5. 0. 5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45.$ quo-

rum tamen tres priores & ultimum quia majores

quam 40 negligere licebit. Tentemus autem -2

pro l & 5 pro R , & in hoc casu pro m tentandi

præterea erunt omnes numeri qui non efficiunt

$R \pm nm$ seu $5 \pm 5m$ majus quam 40, id est numeri

omnes inter 7 & -9 , & videndum an si ponendo

$1 - QQ - pR + nl$, id est $5 - 20 + 20$ seu $5 = 5H$,

fit $H + n^2m$ seu $\frac{1}{2} - 5m = S$, id est si ex his numbe-
ris $\frac{-65}{2}, \frac{-45}{2}, \frac{-45}{2}, \frac{-35}{2}, \frac{-25}{2}, \frac{-15}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}$

$\frac{25}{2}, \frac{45}{2}, \frac{45}{2}, \frac{55}{2}, \frac{65}{2}, \frac{75}{2}, \frac{85}{2}$, aliquis equalis sit alicui
numeratorum 0. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ qui prius in tabulam pro
S relati erant. Et huiusmodi quatuor occurrunt
 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ quibus respondent $\frac{1}{2}, \frac{4}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$ pro b in eadem tabula scripti, ut & $\frac{1}{2}, \frac{4}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
pro m substitui. Verum tentemus $-\frac{1}{2}$ pro S , & pro

$$m, \& \frac{1}{2} \text{ pro } b, \& \text{ fiet } \frac{2RS - m}{2nm} = \frac{-25 + 10}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$\& \frac{2QS + RR - b - nm}{2nl} = \frac{25 + 10 - 5}{-20} = -\frac{1}{2}, \&$$

$$\frac{RS + 2QR - 1 - nm}{2nk} = \frac{-10 + 5 + 20}{-10} = -\frac{1}{2}$$

Quare cum prodeat omni casu $-\frac{1}{2}$ seu b , concludo
numeros omnes recte inventos esse, adeoque vice
questionis propositae scribendum esse $x^4 + 1x^3 + 1x^2 + 1x + S$
 $+ R = \sqrt{5x^2 + 1xx + mx + b}$, id est
 $x^4 + 1x^3 + 1x^2 + 1x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{5x^2 - x^2 - 2xx + x - 1}$.
Item quadrando partes huius, produceretur equa-
tio illa octo dimensionum quae sub initio propone-
batur.

Quod si tentando casus omnes numerorum, pre-
dicti valores omnes ipsius b nullo in casu intersse
consensissent, argumento fuisset equationem per
extractionem surdae radices quadratice reduci non
potuisse.

Deberent autem aliqua hic in operis abbrevia-
tionem annotari, sed quae brevitatis causa praetero,
cum tantarum reductionum perexiguus sit usus, &
rei possibilitatem potius quam praxim commodissi-
mam voluerim exponere. Sunt igitur hae reducti-
ones equationum per extractionem surdae radices
quadratice.

Ad

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per extractionem surda radice cubica, sed & has, ut quæ pensato utiles sint, brevitatis gratia prætereo.

Sunt tamen reductiones quædam cubicarum æquationum vulgo notæ, quas, si penitus præterirem, Lector fortasse desideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3 + qx + r = 0$, cujus secundus terminus dæst. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci posse constat ex præcedentibus. Et supponatur x esse $= a + b$. Erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (id est x^3) $+ qx + r = 0$. Sit $3abb + 3abb$ (id est $3abx$) $+ qx = 0$, & erit $a^3 + b^3 + r = 0$. Per priorem æquationem est

$$b^3 = -\frac{q}{3a}, \text{ \& cubice } b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}. \text{ Ergo per po-}$$

$$\text{steriorem, est } a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0, \text{ seu } a^6 + ra^3$$

$$= \frac{q^3}{27}, \text{ \& per extractionem affectæ radice quadra-}$$

$$\text{ticæ } a^3 = -\frac{1}{3}r \pm \sqrt{\frac{1}{9}r^2 + \frac{q^3}{27}}. \text{ Extrahe radicem}$$

$$\text{cubicam \& habebitur } a. \text{ Et supra erat } -\frac{q}{3a} = b,$$

$$\text{\& } a + b = x. \text{ Ergo } a - \frac{q}{3a} \text{ radix est æquationis}$$

propositæ.

Exempli gratia proponatur æquatio $y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0$. Ad tollendum secundum æquationis

hujus terminum ponatur $x + 2 = y$, & orietur $x^3 + 6x + 8 = 0$, ubi est $q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{3}r^2 = 16$.

$$\frac{q^3}{27} = -8, a^3 = -4 \pm \sqrt{8}, a - \frac{q}{3a} = x, \text{ \& } x + 2 = y,$$

$$\text{id est } 2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}} = y.$$

Et hoc modo erui possunt radices omnium cubicarum æquationum ubi q affirmativum est; vel etiam ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quam $\frac{1}{4}rr$, id est ubi due ex radicibus æquationis sunt impos-

sibiles. At ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ simul ma-

jus quam $\frac{1}{4}rr$, sit $\sqrt[3]{\frac{1}{4}rr - \frac{q^3}{27}}$ quantitas impossi-

bilis, atque adeo æquationis radix x vel y , hoc casu impossibilis erit. Scilicet hoc casu tres sunt radices possibiles quæ omnes eodem modo se habent ad æquationis terminos q & r , & indifferenter designantur per literam x vel y , adeoque omnes eadem deberent lege erui & exprimi qua una aliqua eruitur & exprimitur: Sed omnes tres lege præfata ex-

primere impossibile est. Quantitas $a - \frac{q}{3a}$ qua x de-

signatur multiplex esse non potest, eaque de causa Hypothesis quod x , hoc in casu ubi triplex est,

æqualis esse potest binomio $a - \frac{q}{3a}$, seu $a + b$ cu-

jus nominum cubi $a^3 + b^3$ conjunctim æquantur r , & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q , plane impossibilis est; & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

Est & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de $a^3 + b^3 + r$ id est de nihilo, aufer $a^3 + r$,

seu $\frac{1}{4}r \pm \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$, & restabit $b^3 = -\frac{1}{4}r$

$\pm \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}$. Est itaq; $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}r + \sqrt[3]{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$, &

$$\& b = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}; \text{ vel } s = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}; \&$$

$$b = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}, \text{ adeoque horum summa}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{3}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{3}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27}}}$$

erit = x.

Possunt etiam aequationum biquadraticarum radices mediante cubis erui & exprimi.

Tollendus est autem primum secundus aequationis terminus. Sit aequatio resultans $x^4 + gx^3 + rx^2 + s = 0$. Pone hanc multiplicatione duarum $xx + ex + f = 0$, & $xx - ex + g = 0$ generari,

$$\text{id est eandem esse cum hac } x^4 + \overset{+f}{g}xx + \overset{+g}{-e}f = 0$$

$$+fg = 0, \& \text{ collatis terminis fiet } f + g - ee = q, eg - ef = r, \& fg = s. \text{ Quare } q + ee = f + g,$$

$$\frac{r}{e} = g - f, \frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g, \frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f.$$

$$\frac{qq + 2eeq + e^4 - \frac{rr}{ee}}{4} (= fg) = s, \& \text{ per reductio-$$

$$\text{nem } e^4 + 2qe^2 + \frac{qq}{4} - ee - rr = 0. \text{ Pro } ee \text{ scribe}$$

$$y, \& \text{ fiet } y^4 + 2qyy + \frac{qq}{4}y - rr = 0, \text{ aequatio}$$

cubica cujus terminus secundus tolli potest, & radix deinceps per regulam praecedentem vel secus extrahi. Dein habita illa radice regrediendum o-

$$\text{rit ponendo } \sqrt{y} = e, \frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f, \frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g,$$

$$\& \text{ aequationes duae } xx + ex + f = 0, \& xx - ex + g$$

$+g=0$, extractis earum radicibus dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ $x^4 + qx + r$

$+rx+s=0$, nimirum $x = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - s}$,

$ax = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - s}$. Ubi notandum est quod

si æquationis biquadraticæ radices quatuor possi-

biles sunt, æquationis cubicæ $y^3 + 2qyy - \frac{1}{4}r^2y - rr = 0$ radices tres possibiles erunt, atque adeo

per regulam præcedentem extrahi nequeunt. Si

æquationis quinquæ vel plurium dimensionum radices affectæ in radices non affectas medietæ æquationis ter-

mini quoque pacto sublevis convertantur, illa radicum

expressio semper erit impossibilis ubi plures quam una ra-

dix in æquatione imparium dimensionum possibiles sunt,

que plures quam dua in æquatione parium dimensionum

que per extractionem surda radices quadratica methodo

suprà exposta reduci nequeunt.

Docuit Cartesius æquationem biquadraticam per

regulas ultimo traditas reducere. E. g. proponatur

æquatio à nobis suprà reducta $x^4 - x^3 - 5xx$

$+ 12x - 6 = 0$. Tolle secundum terminum scri-

bendo $v + \frac{1}{4}$ pro x , & orietur $v^4 - \frac{1}{2}vv + \frac{1}{4}v$

$- \frac{1}{4} = 0$. Ad tollendas fractiones scribe $\frac{1}{2}z$ pro

v , & orietur $z^4 - 86zz + 600z - 851 = 0$. Hic

est $-86 = 4$, $600 = 1$, & $-851 = 1$, adeoque

$z^4 + 2qyy - \frac{1}{4}r^2y - rr = 0$, substitutis æquipol-

lentibus fiet $y^3 - 172yy + 10800y - 360000 = 0$.

Ubi tentando omnes ultimi termini divisores 1,

$-1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, & deinceps us-

que ad 100 invenietur tandem $y = 100$. Quod

idem multo expeditius per methodum à nobis su-

prà expositam invenire potuit. Dein habito y , radix

eius 10 erit e , & $\frac{q+ee-\frac{1}{2}r}{2}$, id est $\frac{-86+100-60}{2}$,

scilicet 7 .

seu -23 erit f , & $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}$ seu 37 erit g , adeoque æquationes $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, scripto z pro x , & substitutis æquipolentibus evadent $zz+10z-23=0$, & $zz-10z+37=0$. Restitue v pro $\frac{1}{2}z$, & orientur $vv+2\frac{1}{2}v-\frac{23}{2}=0$, & $vv-2\frac{1}{2}v+\frac{37}{2}=0$. Restitue insuper $x-\frac{1}{2}$ pro v , & emergent $xx+2x-2=0$, & $xx-3x+3=0$, æquationes duarum quarum radices quatuor $x=-1\pm\sqrt{3}$, & $x=1\pm\sqrt{-3}$, eadem sunt cum radicibus quatuor æquationis bi-quadraticæ sub initio propositæ $xx^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Sed hæc facilius per methodum inveniendi divisores à nobis supra explicatam invenire potuerunt.



EQUA

[The page contains several lines of handwritten mathematical notes and calculations, which are mostly illegible due to extreme fading and bleed-through from the reverse side.]



AUG 23

ÆQUATIONUM

Constructio linearis.

HActenus æquationum proprietates; transmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonstrationes non semper adjunxi quoniam satis faciles mihi vise sunt, & nonnunquam absque nimis ambagibus tradi non possent. Restat jam tantum ut æquationum postquam ad formam commodissimam reductæ sunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hic præcipua difficultas est in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodissime per æquationis constructionem aliquam seu Geometricam sive Mechanicam confit. Qua de causa non pigebit hujusmodi constructiones aliquas subungere.

Veteres, ut ex Pappo discimus, trisectionem anguli, & inventionem duarum medie proportionalium, sub initio per rectam lineam & circulum, frustra aggressi sunt. Postea considerare cœperunt alias

alias permultas lineas, ut Conchoidem, Cissoi-
dem, & Conicis sectiones, & per harum aliquas
solverunt Problemata. Tandem re penitus exa-
minati, & Conicis sectionibus in Geometriam
receptis Problemata distinxerunt in tria genera:
Primum quæ per lineas, à plano originem derivan-
tes, Rectam nempe & Circulum solvi possint; Se-
cunda quæ per lineas ortum à solidi id est Coni
consideratione derivantes solvebantur; & Linea-
ria ad quorum solutionem requirebantur lineæ
magis compositæ. Et juxta hanc distinctionem,
Problemata solida per alias lineas quam Coni-
cas sectiones solvere à Geometria alienum est;
præsertim si nullæ aliæ lineæ præter rectam, cir-
culum, & Conicis sectiones in Geometriam reci-
piantur. At Recentiores longius progressi rece-
perunt lineas omnes in Geometriam quæ per
æquationes exprimi possunt, & pro dimensionibus
æquationum distinxerunt lineas illas in genera,
legemque tulerunt non licere Problema per li-
neam superioris generis construere quod constitui
potest per lineam inferioris. In lineis contemplan-
dis, & eruen-
dis earum proprietatibus, distinc-
tionem earum in genera juxta dimensionum æquatio-
num per quas definiuntur laudo. At æquatio non
est, sed descriptio quæ curvam Geometricam effi-
cit. Circulus linea Geometrica est, non quod per
æquationem exprimi potest, sed quod descriptio
ejus postulat. Equationis simplicitas non est,
sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constru-
ctiones Problematum prius admittendam esse indi-
cat. Nam æquatio ad Parabolam simplicior est
quam æquatio ad circulum; & tamen circulus ob
simpliciore descriptionem prius admittitur. Cir-
culus & Coni sectiones si æquationum dimensiones
spectentur ejusdem sunt ordinis, & tamen circulus
in constructione problematum non connumeratur
cum

eum his, sed ob simplicem descriptionem deprimi-
 tur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per
 circulum construere quod per rectas constitui potest,
 non sit illicitum; per Conicas vero sectiones con-
 struere quod per circulum constitui potest vitio ver-
 tatur. Aut igitur legem à dimensionibus æquatio-
 num in circulo observandam esse statue, & sic di-
 stinctionem inter problemata plana & solida ut vi-
 tiosam tolle; aut concede legem illam in lineis su-
 periorum generum non ita observandam esse quam
 aliqua ob simpliciorum descriptionem præferantur
 aliis ejusdem ordinis, & in constructione Proble-
 matum cum lineis inferiorum ordinum connu-
 rentur. In constructionibus quæ sunt æque Geo-
 metricæ præferendæ semper sunt simpliciores. Hæc
 lex omni exceptione major est. Ad simplicitatem
 vero constructionis expressiones Algebraicæ nil con-
 ferunt. Solæ descriptiones linearum hic in centum
 veniunt. Has solas considerabant Geometræ qui
 circulum conjungebant cum recta. Prout hæc sunt
 faciles vel difficiles constructio facilis vel difficilis
 redditur. Adeoque à rei natura alienum est leges
 constructionibus aliunde præscribere. Aut igitur
 lineas omnes præter rectam & circulum & forte
 Conicas sectiones è Geometria cum Veteribus ex-
 cludamus, aut admittamus omnes secundum de-
 scriptionis simplicitatem. Si Trochoides in Geo-
 metriam reciperetur, liceret ejus beneficio angu-
 lum in data ratione secare. Numquid ergo re-
 prehenderes siquis hac linea ad dividendum angu-
 lum in ratione numeri ad numerum uteretur, &
 contenderes hanc lineam per æquationem non de-
 finiri, lineas vero quæ per æquationes definiuntur
 adhibendas esse? Igitur si angulus e.g. in 10001
 partes dividendus esset, teneremur curvam lineam
 æquatione plusquam centum dimensionum defini-
 tam in medium asferre, quam tamen nemo mortali-
 um

lium describere nodum intelligere valeret; & hanc antepone Trechoidi quæ linea notissima est, & per motum rotæ vel circuli facillime describitur. Quod quam absurdum sit quis non videt? Aut igitur Trechoides in Geometriam non est admit-tenda, aut in constructione Problematum curvis omnibus difficilioris descriptionis auterenda. Et eadem est ratio de reliquis curvis. Quò nomine trisectiones anguli per Conchoidem quas *Archi-medes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus po-nere præ aliorum hac de re inventis omnibus laudamus; siquidem lineas omnes præter rectam & circulum è Geometria excludere debeamus, aut secundum descriptionis simplicitatem admittere, & Conchoides simplicitate descriptionis nulli curvæ præter circulum cedit. *Æquationes* sunt expressio-nes computi Arithmetici, & in Geometria locum propriè non habent, nisi quatenus quantitates vere Geometricæ (id est lineæ, superficies, solida & proportionēs) aliqua alijs æquales enunciantur. Multiplicationes, Divisiones, & ejusmodi computa in Geometriam recens introducta sunt; idque in-consulto, & contra primum institutum scientiæ hujus. Nam qui constructiones Problematum per rectam & circulum à primis Geometris adinventas considerabit, facile sentiet Geometriam excogita-tam esse ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæc duæ scientiæ confundi non debent. Veteres tam sedulo distin-guebant eas ab invicem, ut in Geometriam termi-nos Arithmeticos nunquam introduxerint. Et re-centes utramque confundendo amiserunt simplici-tatem in qua Geometriæ elegantia omnis consistit. Est itaque *Arithmetice* quidem simplicitas quod per simplices æquationes determinatur, at *Geo-metricæ* simplicitas est quod per simpliciore ductum linearum colligitur; & in Geometria prius &

& præstantius esse debet quod est ratione Geometrica simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit si cum Mathematicorum Principe, *Archimede*, aliisque Veteribus Conchoidem ad Solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen si quis aliter senserit, sciat me hic de constructione non Geometrica sed qualicunque sollicitum esse, qua radices æquationum in numeris proxime assequar. Cujus rei gratia præmitto hoc Problema Lemmaticum.



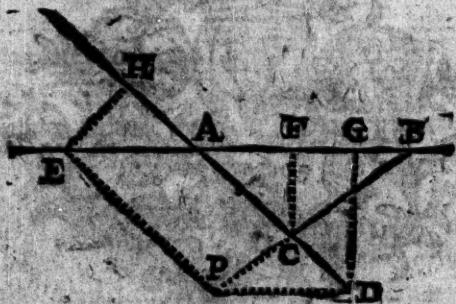
T

Inter

Inter datas duas lineas AB , AC rectam data longitudinis BC ponere quæ producta transeat per datum punctum P .

SI circa polum P gyret linea BC , & simul terminus ejus C incedat super recta AC , ejus alter terminus B describet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B . Junge PB , & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eadem lege linea BC duci potest ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur.

Sicuti constructio hæcce per Conchoidem minus placeat, potest alia per Conicam sectionem ejus



vice substitui. A puncto P ad rectas AD , AE age PD , PE constituentes parallelogrammum $EADP$, & à punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendicularia CF , DG , ut & à puncto E ad rectam AC versus A productam perpendicularum EH , & dictis $AD = a$. $PD = b$. $BC = c$.
AG

$AG = d$, $AB = x$, & $AC = y$. Erit $AD . AC$.
 $:: AC . AF$, adeoque $AF = \frac{dy}{a}$. Erit & AB .

$AC :: PD . CD$, seu $x . y :: b . a - y$. Ergo
 $by = ax - yx$, quæ æquatio est ad Hyperbolam
 Rursus per 13. II. *Elem.* erit $BCq = ACq$
 $+ ABq - 2FAB$, id est $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$.

Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de
 partibus hujus, & restabit $cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx$

$- 2dx$, æquatio ad circulum, ubi x & y ad re-
 ctos sunt angulos. Quare si hæc duas lineas
 Hyperbolam & Circulum ope harum æquationum
 componas, earum interseccionem habebis x & y ,
 seu AB & AC quæ positionem rectæ BC deter-
 minant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc
 modum.

Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD ,
 & KM æqualem PD continentes angulum
 rectum MKL . Comple parallelogrammum KL
 MN , & asymptotis LN , MN per punctum K
 describe Hyperbolam IKX .

In KM versus K producta cape KP æqualem
 AG & KQ æqualem BC . Et in KL producta
 versus K cape KR æqualem AH , & RS æqua-
 lem RQ . Comple parallelogrammum $PKRT$,
 & centro T intervallo TS describe circulum.
 Secet hic Hyperbolam in puncto X . Ad KP de-
 mitte perpendiculum XY , & erit XY æqualis

LEM. III. Est $KE - BK$ ad YX ut YX ad AK .

Nam per 12. II. Elem. est $YK^q - CK^q = CY^q - CY \times CX = CY \times YX$, hoc est si Theorema resolvatur in proportionem CY ad $YK - CK$ ut $YK + CK$ ad YX . Sed est $YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK$. Et $YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK$. Adeoque est CY ad $KE - BK$ ut $KE + AK$ ad YX . Sed per Lemma secundum erat CY ad $KE + AK$ ut YX ad AK . Ergo ex æquo est YX ad $KE - BK$ ut AK ad YX . Seu $KE - BK$ ad YX ut YX ad AK . Q. E. D.

His præmissis Demonstrabitur Theorema ut sequitur. In primo Lemmate erat YX ad AK ut CX ad KE , seu $KE \times YX = AK \times CX$. In tertio erat $KE - BK$ ad YX ut YX ad AK . Unde si prioris rationis termini ducantur in YX fiet $KE \times YX - BK \times YX$ ad YX^q ut YX ad AK , id est $AK \times CX - BK \times YX$ ad YX^q ut YX ad AK , & ductis extremis & mediis in se $AK^q \times CX - AK \times BK \times YX = YX^3$ cub. Denique pro YX , AK , BK , & CX repositis x , n , $\frac{q}{n}$, & $\frac{r}{nn}$ orietur

$r - qx = x^3$. Q. E. D. Quod vero ad signorum variationes attinet, istis secundum casus Problematum determinandis non immoror.

Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deest $x^3 + px + r = 0$. Et ad ejus constructionem assumpto quolibet n , cape in recta aliqua longitudes duas $KA = \frac{r}{nn}$, & $KB = p$, idque ad easdem partes si r & p habeant eadem signa, aliter ad contrarias. Biseca BA in C , & centro K radio KC describe circulum cui inscribe CX æqualem n ,

& producat eam utrinque. Item junge AK, & producat eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inscribe EY ejusdem longitudinis cum CA, ita ut ea si producat transseat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ sunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X versus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X si modo habeatur $+$, & contra si habeatur $-$.

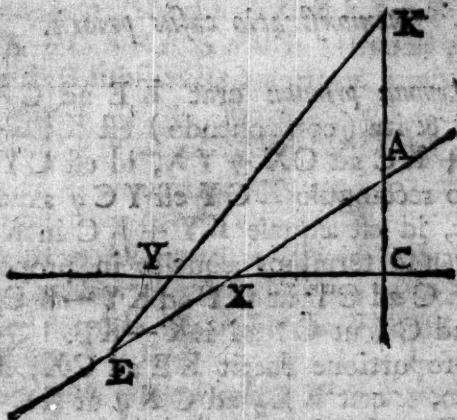
Ad hujus Propositionis demonstrationem Schemata & Lemmata de priori propositione mutuo sumantur, & Demonstratio erit ut sequitur.

Per Lemma 1, erat YX ad AK ut CX ad KE seu $YX \times KE = AK \times CX$, & per Lemma 3, KE $-$ KB ad YX ut YX ad AK, aut (sumpto KB ad contrarias partes) KE + KB ad YX ut YX ad AK, adeoque KE + KB in KE ad YX $\times$ KE, seu AK $\times$ CX ut YX ad AK, seu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in se, est KE cub. + KB $\times$ KE $q = AK \times CX q$, & ipsarum KE, KB, AK, & CX repositis valoribus supra assignatis, $x^3 + p \times x = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimensionum $x^3 + p \times x + q \times + r = 0$, nullo termino carentem, & cujus tres radices non sunt omnes affirmativæ neque omnes negativæ.

Et primo si terminus q negativus est, in recta aliqua KB capiantur longitudines duæ KA = $-\frac{q}{p}$ & KB = p , idque ad easdem partes puncti K si p & $\frac{r}{p}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias, Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendicularum CX æquale radici quadratice termini q : Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY quæ æqualis

qualis sit rectæ AC , & producta transeat per punctum K , atque KE erit radix æquationis, quæ



quidem affirmativa erit si punctum X cadat inter puncta A & E , negativa vero si punctum E cadat ad partes puncti X versus A .

Quod si terminus q affirmativus est, in recta KB capiantur longitudines illæ duæ $KA = \sqrt{\frac{-r}{p}}$, & $KB = \frac{q}{KA}$, idque ad easdem partes puncti K , si $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias: Biseca AB in C , & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino p : & inter lineas rectas AX & CX , utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY quæ æqualis sit rectæ AC , & producta transeat per punctum K , atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit si punctum x cadat inter puncta A & E , affirmativa

affirmativa vero si punctum Y cadat ad partes puncti X versus punctum C.

Demonstratio casus prioris:

Per Lemma primum erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) est KE + AK, id est KY + KC ad CX + YX, id est CY. Sed in triangulo rectangulo KCY est YC q æquale YK q — KC q, id est æquale KY + KC in KY — KC, & resolvendo terminos æquales in proportionales, KY + KC ad CY ut CY ad KY — KC, seu KE + AK ad CY ut CY ad EK — KB. Quare cum in hac proportionem fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KE q ad CX q ut KE + AK ad KE — KB; & ductis extremis & mediis in se KE cub. — KB × KE q = CX q × KE + CX q × AK. Et restitutis valoribus supra assignatis $x^3 - p \times x = q \times x + y$.

Demonstratio casus secundi.

Per Lemma primum est KE ad CX ut AK ad YX, ductisque extremis & mediis in se fit KE × YX = CX × AK. Scribe ergo in superioribus KE × YX pro CX × AK, & fiet KE cub. — KB × KE q = CX q × KE + CX × KE × YX. Et applicatis omnibus ad KE erit KE q — KB × KE = CX q + CX × YX: ductisque omnibus in AK habebitur AK × KE q — AK × KB × KE = AK × CX q + AK × CX × YX. Ac rursus scripto KE × YX pro CX × AK, fiet AK × KE q — AK × KB × KE = KE × YX × CX + KE × YX q: & applicatis omnibus ad KE orietur AK × KE — AK × KB = YX × CX + YX q: ductisque omnibus in YX emerget AK × KE × YX — AK × KB × YX = YX q

rectam $CX = \frac{r}{m}$, & per puncta K, C, & X describere

circulum KCXG. Junge AX, & junctam produce donec ea iterum secet circulum ultimo descriptum KCXG in puncto G. Denique inter hunc ultimo descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam BY ejusdem longitudinis cum recta AC, ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC si habeatur $-r$; & contra si habeatur $+r$ affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.

Ad hujus vero constructionis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. *Positis quæ in constructione superiore, est CE ad KA ut CE + CX ad AY, & CX ad KA.*

Nam recta KG ducta, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY eo quod EY & AC juxta Hypothesin æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbate quod sit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut KA ad KY. Unde componendo fit CE + CX ad CX ut KA + KY ad KY, id est ut AY ad KY, & vicissim CE + CX ad AY ut CX ad KY hoc est ut CE ad KA. Q. E. D.

LEM. II. *Demisso ad lineam GT perpendicularo CH, fiet rectangulum 2 HET aequale rectangulo CE x CX.*

Nam

Nam demisso etiam ad lineam AY perpendicularo GL , triangula KGL , ECH rectos habentia angulos ad L & H , & angulos ad K & E in eodem circuli CGK segmento CKE G , adeoque æquales, æquiangula sunt & proinde similia. Est ergo KG ad KL ut EC ad EH . Porro, à puncto A ad lineam KG demisso perpendicularo AM , ob æquales AK , AG bifecabitur KG in M , & triangula KAM , KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient similia: & inde est AK ad KM ut KG ad KL . Sed ut est AK ad KM ita est $2AK$ ad $2KM$ seu KG , & ita (ob similia triangula AKG , ACX) est $2AC$ ad CX ; & (ob æquales AC & EY) ita est $2EY$ ad CX . Ergo est $2EY$ ad CX ut KG ad KL . Sed erat KG ad KL ut EC ad EH , ergo est $2EY$ ad CX ut EC ad EH , atque adeo rectangulum $2HEY$ (ductis nimirum extremis & mediis in se) æquale est rectangulo $EC \times CX$. Q. E. D.

Assumpsimus hic lineas AK , AG æquales esse. Nimirum rectangula CAK , XAG (per *Carol. Prop. 36. lib. III. Elem.*) æqualia sunt, atque adeo ut CA est ad XA ita AG est ad AK . Sed CA , KA æquales sunt per Hypothesin; ergo & AG , AK .

LEM. III. Constructis omnibus ut supra, tres lineæ BY , CE , KA , sunt continue proportionales.

Nam (per *Prop. 12. lib. II. Elem.*) est $CYq = EYq + CEq + 2EY \times EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq - EYq = CEq + 2EY \times EH$. Sed $2EY \times EH$ (per *Lem. 2.*) æquale est rectangulo $CE \times CX$, & addito utrinque CEq fit $CEq + 2EY \times EH = CEq + CE \times CX$. Ergo $CYq - EYq$ æquale est $CEq + CE \times CX$, id est $CY + EY$ in $CY - EY$ æquale est $CEq + CE \times CX$. Et resolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit $CE + CX$ ad $CY + EY$ ut $CY - EY$ ad

ad CE. Sunt autem tres lineæ EY, CA, CB æquales, & inde $CY + EY = CY + CA = AY$, & $CY - EY = CY - CB = BY$. Scribantur itaque AY pro $CY + EY$, & BY pro $CY - EY$, & fiet CE + CX ad AY ut BY ad CE. Sed (per Lem. 1.) est CE ad KA ut CE + CX ad AY, ergo est CE ad KA ut BY ad CE, hoc est lineæ tres BY, CE, KA, sunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio superioris Problematis sic demonstratur.

Per Lemma 1. est CE ad KA ut CX ad KY, adeoque $KA \times CX = KY \times CE$, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA \times CX}{CE} = KY$. His lateribus æqualibus

adde BK & æqualia erunt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ & BY.

Unde per Lemma tertium est $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$

ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in se provenit CEq æquale BK × KA

+ $\frac{KAq \times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE

fit CE cub. æquale $BK \times KA \times CE + KAq \times CX$.

CE erat radix æquationis dicta x, KA erat n,

$KB \frac{q}{n}$, & CX $\frac{r}{nn}$. His pro CE, KA, KB, & CX

substitutis oritur $x^3 = qx + r$, seu $x^3 - qx - r = 0$, æquatio construenda; ubi q & r negativa prodeunt sumptis KA & KB ad easdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori segmento CGK existente. Hic unus casus est Constructionis demonstranda. Ducatur KB ad partes contrarias, id est, mutetur

mutetur signum ejus seu signum ipsius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde est, signum termini q , & habebitur constructio æquationis $x^3 + qx - r = 0$: *Qui casus est alter.* In his casibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad easdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad easdem mutato signo ipsius CX seu $\frac{r}{n}$ vel (quod perinde est) signo ipsius r , & habebitur casus tertius $x^3 + qx + r = 0$, ubi radices omnes sunt negativa. Et mutato rursus signo ipsius KB seu $\frac{q}{n}$ vel solius q , incidetur in casum quartum $x^3 - qx + r = 0$. Quorum omnium casuum constructiones percurrere licebit, & sigillatim demonstrare ad modum casus primi. Nos uno casu demonstrato ceteros leviter attingere satis esse putavimus. Hi verbis iisdem mutato solum linearum situ demonstrantur.

Construenda jam sit æquatio cubica $x^3 + pxx + r = 0$, cujus tertius terminus deest.

In figura superiore assumpta longitudine quavis n , capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{m}$, & KB valeat p . Has cape ad easdem partis puncti K, si modo signa terminorum p & r sint eadem, secus ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K intervallo KC describe circulum CXG. In eo apres rectam CX, æqualem longitudini assumptæ n . Junge AX & produc junctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, describe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc inscripta recta transeat per punctum G si modo ipsa producat: &
acta

acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K versus punctum A si modo habeatur $+$; sin habeatur $-$, affirmativæ sunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et si affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ sunt quæ jacent ex altera.

Demonstratur autem hæc constructio ope Lemmatum trium novissimorum in hunc modum.

Per *Lemma tertium* sunt BY, CE, KA continue proportionales; & per *Lemma primum* ut est CE ad KA ita est CX ad KY. Ergo BY est ad CE ut CX ad KY. BY idem est quod KY — KB. Ergo KY — KB est ad CE ut CX ad KY. Sed ut est KY — KB ad CE ita est KY — KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop. 1. lib. VI. Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY est CE in KY æquale KA in CX. Ergo KY — KB in KY est ad KA in CX (ut KY — KB ad CE, hoc est) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in se invicem fit KY — KB in KY æquale KA in CX; id est KY cub. — KB × KY quad. æquale KA × CX quad. Erat autem in constructione, KY radix æquationis dicta x , KB æqualis p , KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n . Scri-

bantur igitur $x, p, \frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX respective, & fiet $x^3 - pxx = r$, seu $x^3 - pxx - r = 0$.

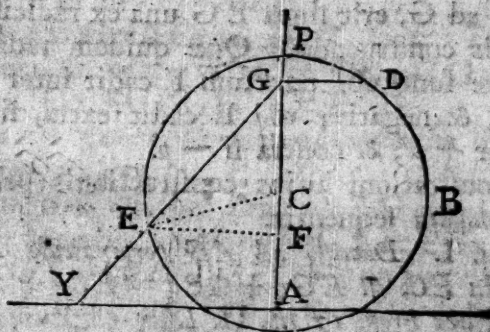
Resolvi potest constructio demonstranda in hæc quatuor æquationum casus, $x^3 - pxx - r = 0$, $x^3 - pxx + r = 0$, $x^3 + pxx - r = 0$, & $x^3 + pxx + r = 0$. Casum primum jam demonstratum dedi, cæteri tres iisdem verbis mutato tantum linearum situ demonstrantur. Nimirum uti sumen-

dq

do KA & KB ad easdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodit KY cub. — KB × KY q = KA × CX q, & inde $x^3 - pxx - r = 0$: sic sumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit simili argumentationis progressu KY cub. + KB × KY q = KA × CX q, & inde $x^3 + pxx - r = 0$. Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY cub. + KB × KY q = — KA × CX q, seu $x^3 + pxx + r = 0$, & KY cub. — KB × KY q = — KA × CX q, seu $x^3 - pxx + r = 0$. Qui omnes casus erant demonstrandi.

Proponatur jam æquatio cubica $x^3 + pxx + qx + r = 0$, nullo (nisi forte tertio) termino carens. Ea construatur ad hunc modum.

Cape ad arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$.



Deinde si termini p & r habent contraria signa, centro C intervallo CD describe circulum PBE.

LEM. II. In constructiōis casu primo ubi circulus *PBE* transit per punctum *D*, est $EGq - GDq = 2CGF$.

Nam per Lemma primum est $EGq + GCq = ECq + 2CGF$, & ablato utrinque GCq , fit $EGq = ECq - GCq + 2CGF$. Sed $ECq - GCq$ idem est quod $CDq - GCq$, hoc est idem quod GDq . Ergo $EGq = GDq + 2CGF$, & subducto utrobique GDq , fit $EGq - GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. III. In constructiōis casu secundo, ubi circulus *PBE* non transit per punctum *D*, est $EGq + GDq = 2CGF$.

Namque in Lemmate primo erat $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq + GCq - ECq = 2CGF$. Sed $GC = DH$ & $EC = CP = GH$: ergo $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$, atque adeo $EGq + GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEM. IV. Est $2CGF$ in $GT = 2CG$ in AGE .

Namque ob similia triangula *GEF*, *GYA* est GF ad GE ut AG ad GY ; hoc est (per *Prop. I. lib. VI. Elem.*) ut $2CG \times AG$ ad $2CG \times GY$. Ducantur extrema & media in se, & fiet $2CG \times GY \times GF = 2CG \times AG \times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio Problematis sic demonstratur.

In casu primo est (per Lem. 2.) $EGq - GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY - GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per Lem. 4.) $= 2CG \times AGE$. Pro GY scribe $EG + EY$, & fiet $EG \text{ cub.} + EY \times EGq - GDq \times EG - GDq \times EY = 2CGA \times EG$, seu $EG \text{ cub.} + EY \times EGq - GDq \times EG - GDq \times EY = 0$.
 $- 2CGA$

In casu secundo est (per Lem. 3.) $EGq + GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq \times GY + GDq \times GY = 2CGF \times GY$ (hoc est per Lem. 4.)

U 2

$= 2CG$

$= 2CG \times AGE$. Pro GY scribe $EG + EY$, & fiet
 $EG \text{ cub.} + EY \times EGq + GDq \times EG + GDq \times EY$
 $= 2CGA \times EG$, seu $EG \text{ cub.} + EY \times EGq$
 $+ GDq \times EG + GDq \times EY = 0$.

Jam vero erat EG radix æquationis constructæ
 dicta x ; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$,

& $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, id est in casu primo ubi ter-

minorum p & r diversa sunt signa: at in casu se-

cundo ubi alterutrius p vel r mutatur signum fiet

$-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur pro EG , GD ,

EY , $2CG$, & GA quantitates x , $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p , n , &

$-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, & casu primo fiet $x^3 + px^2 - \frac{r}{p}x$

$-r = 0$, id est $x^3 + px^2 + qx - r = 0$, casu au-

tem secundo $x^3 + px^2 + \frac{r}{p}x + r = 0$, id est

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Est igitur in utroque

casu EG vera longitudo radicis x . Q. E. D.

Subdistinguitur autem casus uterque in casus

plures particulares: Nimirum prior in hosce x^3

$+ px^2 + qx - r = 0$, $x^3 + px^2 - qx - r = 0$,

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $x^3 - px^2 - qx + r = 0$,

$x^3 + px^2 - r = 0$, & $x^3 - px^2 + r = 0$; posterior

in hosce $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $x^3 + px^2 - qx$

$+ r = 0$, $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $x^3 - px^2 - qx$

$- r = 0$, $x^3 + px^2 + r = 0$, & $x^3 - px^2 - r = 0$.
 Quorum omnium demonstrationes verbis iisdem
 ac duorum jam demonstratorum, mutato tantum
 linearum situ, compinguntur.

Hæ sunt Problematum constructiones præcipuæ per inscriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam positione datam ea lege ut inscripta ad datum punctum convergat. Inscritbitur autem talis recta ducendo *Conchoidem* veterum, cujus Polus sit punctum illud ad quod recta inscribenda debet convergere, Regula seu Asymptotos recta altera positione data, & intervallum longitudo rectæ inscribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E per quod recta inscribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis rectam illam inter circulum & alteram positione datam rectam ratione quacunque mechanica interponere.

In hisce autem constructionibus notandum est quod quantitas n , ubique indeterminata & ad arbitrium assumenda relinquitur, id adeo ut singulis problematis constructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli trisectione dabimus.

Inveniendæ sint inter a & b duæ medie proportionales x & y . Quoniam sunt a, x, y, b continue proportionales erit aa ad xx ut x ad b , adeoque $x^3 = aab$, seu $x^3 - aab = 0$. Hic desunt æquationis termini p & q , & loco termini r habetur $-aab$. Igitur in constructionum formula prima, ubi recta EY ad datum punctum K convergens inseritur inter alias duas positione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$ id est æ-

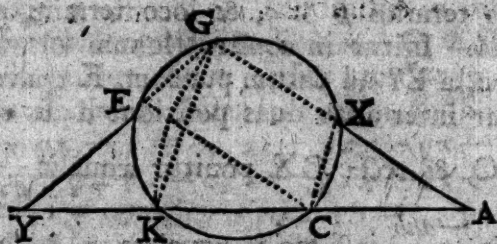
qualis $\frac{-aab}{nn}$, assumo n æqualem a , & sic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emergit constructio.

Duco quamvis KA æqualem a , eamque biseco in C, centroque K intervallo KC describo cir-

culum CX ad quem apto rectam CX æqualem b & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id est XY & KE duæ medie proportionales inter a & b . Constructio nota est.

In altera autem constructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circumulum GECX & rectam AK, estque $CX = \frac{r}{m}$ id est (in hoc Problemate) $= \frac{aab}{m}$, pono ut prius $a = a$, & sic fit $CX = b$, cæteraque peraguntur ut sequitur.

Duco rectam quamvis KA æqualem a , eamque biseco in C & centro A intervallo AK describo

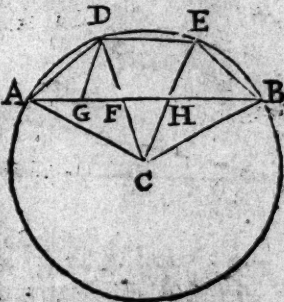


circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem ab constituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circumulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inscribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad

ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$ KG, id est EC & KY duæ medie proportionales erunt inter datas a & b .

Secundus jam fit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus secandus ACB, partes ejus inveniendæ ACD, DCE, ECB.

Centro C intervallo CA describatur circulus ADEB secans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jun-gantur AD, DE, EB ut & AB secans rectas CD, CE in F & H, & ipsi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob similia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales sunt CA, AD, DF, FG. Ergo si dicatur AC = a , & AD = x , fiet DF = $\frac{xx}{a}$, & FG = $\frac{x^3}{aa}$. Est autem AB = BH



$$+ HG + FA - GF = 3 AD - GF = 3x - \frac{x^3}{aa}$$

Dic AB = b , & fiet $b = 3x - \frac{x^3}{aa}$, seu $x^3 - 3aax$

+ $aab = 0$. Hic deest æquationis terminus secundus p , & loco q & r habentur $-3aa$ & aab . Ergo in constructionum formula prima ubi erat $p = 0$,

KA = n , KB = $\frac{q}{n}$, & CX = $\frac{r}{nn}$, id est in pro-

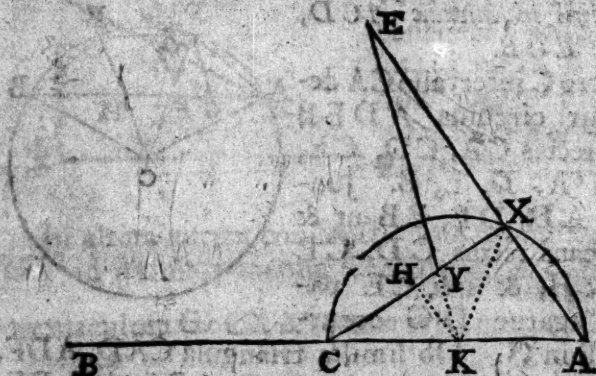
blemate jam construendo KB = $-\frac{3aa}{n}$, & CX

= $\frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam simplicif-

simæ pono $n = a$, & sic fit KB = $-3a$, & CX

= b . Unde talis emergit Problematis constructio.

Ago quamvis $KA = a$, & ad contrarias partes $KB = 3a$. Bifeco BA in C , centroque K intervallo KC describo circulum, cui inscribo rectam

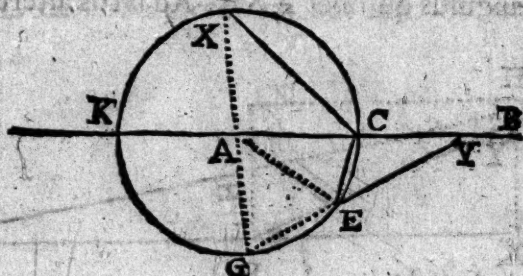


$CX = b$. Et acta recta AX , inter ipsam infinite productam & rectam CX pono rectam EY aequalem AC , & convergentem ad punctum K . Sic fit $XY = x$. Quinetiam ob aequales circulos $ADEB$, CXA , & aequales subtenfas AB , CX , nec non aequales subtenfarum partes BH , XY , aequales erunt anguli ACB , CKX , ut & anguli BCH , XKY , atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY . Dati igitur cujuscvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX , AX infinite productas rectam EY aequalem diametro AC , & convergentem ad circuli centrum K .

Hinc si à circuli centro K ad subtenfam CX demittas perpendicularum KH , erit angulus HKY tertia pars anguli HKX , adeo ut si detur quilibet angulus HKX inveniri possit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriusvis KX pun-

cto

C, centroque A intervallo AC describe circulum.
In eo pone rectam $CX = b$. Junge AX, & jun-
ctam produc donec ea iterum secet circulum jam



descriptum in G. Tum inter hunc circulum &
rectam KC infinite productam pone rectam EY æ-
qualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G,
& acta recta EC erit longitudo quæsita x , qua ter-
tia pars anguli dati subtenditur.

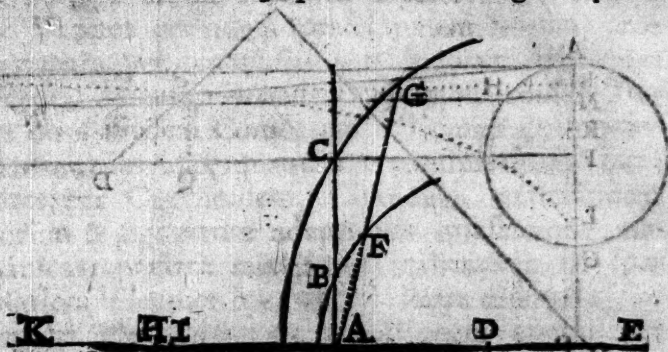
Talis constructio consequitur formulam superius
allatam: quæ tamen sic evadet concinnior. Ob
æquales circulos ADEB & KXG, & æquales sub-
tensas CX & AB, æquales sunt anguli CAX sive
KAG & ACB, adeoque CE subtensa est tertia
partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo
KAG, ut ejus inveniaturs pars tertia CAE, pone
inter circulum KGC, & anguli latus KA infinite
productum rectam EY æqualem circuli semidia-
metro AG, & convergentem ad punctum G. Sic

*Lemma Ar-
chim 8.*

docuit Archimedes angulum trifariam
secare. Eadem constructiones facilius
explicari possint quam hic factum est;
sed in his volui ostendere quomodo ex generalibus
Problematum constructionibus superius expositis
constructiones simplicissimas particularium Proble-
matum derivare liceat.

Præter

Præter constructiones hic expositas adjungere li-
ceret quamplurimas. Ut si inter a & b invenirentur
essent duæ mediæ proportionales. Age quavis



AK $\perp$ B, & huic perpendiculari AB $\perp$ A, Bifeca AK in I, & in eadem AK, subtenit BI æqualem pone AH; ut & in linea AB produca subtenit BH æqualem AC. Tum in linea AK ad alteras partes puncti A cape AD cuiusvis longitudinis, & huic æqualem DE, centrisque D & E, intervallis DB, EC describe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF, prima duarum medie proportionalium quas invenire oportuit.

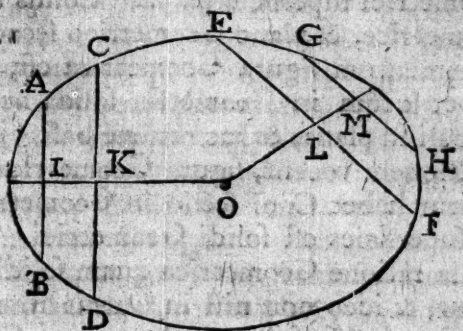
Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per *Cissoidem*; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualementem nemo, quod scio, apposuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem *Cissois* pertinet. Ad punctum F erigatur normalis FD , eaque producat in infinitum. Et producat FG ad P , ut FP æqualis sit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula PED ea lege ut crux ejus EP perpetuo transeat per punctum P , & crux alterum ED circuli Diametro AG seu FP æquale, termino suo D tangat semper lineam FD .

Haftenus constructionem solidorum Problematum per operationes quarum praxis manualis maxime simplex est & expedita exponere visum fuit. Sic Veteres postquam confectioem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constructiones ob difficilem Conicarum sectionum descriptionem inutiles esse, quarebant constructiones faciliores per Conchoidem, Cissoidem, extensionem filorum & figurarum adaptiones quascunque mechanicas: praelata mechanica utilitate inutili speculationi Geometricæ, ut ex *Pappo* discimus, Sic magnus ille *Archimedes* trisectionem anguli per conic sectiones à superioribus Geometris expositam neglexit, & in Lemmatis suis angulum modo à nobis superius exposito trifariam secare docuit. Si veteres problemata per figuras ea tempestate in Geometriam non receptas construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ conic sectiones à plerisque receptæ.

Verum tamen novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hæc omnes in Geometriam recipiunt, Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem Problematum eo ordine quo æquationes quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometria fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus hac lege cum Conic sectionibus jungendus esset quem tamen Geometræ omnes cum linea recta conjungunt. Vacillante autem hac regula tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam meo quidem judicio lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent, nisi forte linearum

rum distinctio aliqua prius excogitetur qua linea circularis jungatur cum recta, & à reliquis omnibus segregetur. Quinimo ne tum quidem augenda est Geometria plana numero linearum, Nam figuræ omnes sunt planæ quæ admittuntur in Geometriam planam, id est quas Geometrix postulent in plano describere, Et problema omne planum est quod per figuras planas construi potest. Sic igitur admissis in Geometriam planam conicis sectionibus, aliisque magis compositis figuris, problemata omnia solida & plus quam solida quæ per has figuras construi possunt evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejusdem ordinis. Linea recta Analytice simplicior est quam circulus; hoc non obstante problemata ejusdem sunt ordinis quæ per rectas solas, & quæ per circulos construuntur. Solis postulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum recta. Et multo magis Ellipsis quæ minus differt à circulo quam circulus à recta, postulando consimiliter descriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis speculando Ellipsin incideret in problema aliquod solidum, et ipsum beneficio ejusdem Ellipseos & circuli construeret: hoc problema jam pro plano habendum esset, eo, quod Ellipsis jam ante in plano descripta haberi supponitur, & constructio omnis quæ superest absolvi-
tur per circuli solius descriptionem. Eadem de causa problemata quævis plana per datam Ellipsin construere licitum est. Verbi gratia si data Ellipseos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipsi occurrentes in A, B, C, D, aliasque duas EF, GH Ellipsi occurrentes in E, F, G, H. Has bisecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem usque ad concursum suum in O. Legitima est hæc constructio plani
pro-

problematis per Ellipsin. Nil refert quod Ellipsis Analytice definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod Ellipsis Geometrice gene-



retur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod Ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida per ipsam constructa reducit ad ordinem planorum, efficitque ut plana omnia per ipsam legitime construantur. Et eadem est ratio Postulati. Quod vi postulatorum fieri potest, ut jam factum, & datum assumere concessum est. Postuletur igitur Ellipsin in plano describere, & ad ordinem planorum problematum reducentur ea omnia quæ per Ellipsin construi possunt, planaue omnia per Ellipsin licebit construere.

Neceffe est igitur aut Problemata plana & solida inter se confundi, aut lineas omnes rejici è Geometria plana præter rectam & circulum, & siqua forsan alia derur aliquando in statu construendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi nemo certe permiserit. Rejiciantur igitur è Geometria plana sectiones Conicæ, alique figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in statu problematum dari. Alienæ sunt igitur à Geometria descriptiones illæ omnes conicarum sectionum in plano quibus hodierni Geometra tantopere

topere indulgent. Nec tamen ideo Coni sectiones à Geometria rejiciendæ erunt. Hæ in plano non describuntur Geometricè, generantur vero in solidi Geometrici superficie plana. Conus constituitur Geometricè, & plano Geometrico secatur. Tale Coni segmentum figura Geometrica est, eundemque habet locum in Geometria solida ac segmentum circuli in plana, & hac ratione basis ejus, quam Coni sectionem vocant, figura Geometrica est. Locum igitur habet Coni sectio in Geometria quatenus ea superficies est solidi Geometrici. Alia autem nulla ratione Geometrica quam solidi sectione generatur, & ideo non nisi in Geometriam solidam antiquitus admissa fuit. Talis autem Conicarum sectionum generatio difficilis est, & in rebus practicis, quibus Geometria potissimum inservire debet, prorsus inutilis. Ideo veteres se ad varias figurarum in plano descriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar constructiones præcedentes concinnavimus. Sunt constructiones illæ Mechanicæ: sic & constructiones per Coni sectiones in plano (ut jam moris est) descriptas Mechanicæ sunt. Sunt constructiones per datas Coni sectiones Geometricæ: sic & constructiones per alias quascunque figuras datas Geometricæ sunt, & ejusdem ordinis cum constructionibus planorum Problematum. Nulla ratione præferendæ sunt in Geometria Sectiones conicæ figuris aliis, nisi quatenus illæ à sectione Coni, praxi ad solutionem problematum prorsus inutili, derivantur. Verum tamen ne constructiones per Conicas sectiones omnino præteream, visum fuit aliqua de his subungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ consulatur.

Conicarum sectionum simplicissima est Ellipsis. Hæc notior est, & circulo magis affinis, & praxi manuali

manuali facilius describitur in plano. Parabolam præferunt plerique ob simplicitatem æquationis per quam ea exprimitur. Verum hac ratione Parabola ipso etiam circulo præferenda esset, contra quam fit. Falsa est igitur argumentatio à simplicitate æquationum. Equationum speculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum simplicitas est considerationis Analytica. Nos in compositione versamur, & compositioni leges dandæ non sunt ex Analysisi. Manuducit Analysis ad Compositionem: sed Compositio non prius vere confit quam liberatur ab omni Analysisi. Infit compositioni vel minimum Analyseos, & compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est & à mixtura speculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum simplicitas à simplicitate geneseos & Idearum, & æquatio non est sed descriptio (sive Geometrica sive Mechanica) qua figura generatur & redditur conceptu facilis. Ellipsi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam quomodo æquationes per ipsam construere licet.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = p \times x + qx + r$, ubi p , q & r datas terminorum æquationis coefficientes cum signis suis $+$ & $-$ significant, & alteruter terminorum p & q , vel etiam uterque deesse potest. Sic enim æquationum omnium cubicarum constructiones una illa operatione quæ sequitur exhibebimus.

A puncto B in recta quavis data cape duas quascunque rectas BC, BE ad easdem partes; ut & inter ipsas mediam proportionalem ED. Et BC dicta n , cape etiam in eadem recta BA = $\frac{q}{n}$, idque versus punctum C si habeatur $-q$, aliter ad partes

circulo, quemadmodum videre est in positione γ^o . Nam dimidium perpendiculi γX ab occurfus illius puncto γ in rectam $A E$ demissi erit radix æquationis. Potest autem Regula GRS vel γ^o terminus G vel γ , circulo in tot punctis occurrere quoz sunt possibiles radices. Et è radicibus hæ sunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ $A E$ ad quas recta FI ducitur à puncto F , & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ $A E$, si modo habeatur $+r$: & contra si habeatur $-r$.

Demonstratur autem hæc constructio subsidio Lemmatum sequentium.

L E M. I. *Positis quæ in superiore constructione, est $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$*

Namque ex natura circuli est $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed est $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$ hoc est æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id est ipsi $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq , & manebunt equalia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per *Prop. 4. lib. II. Elem.*) æquale est $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo $AIq - GIq$ æquale est $AGq + 2AGI$, hoc est æquale $2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GI$, seu æquale $2AG \times FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale est $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q. E. D.

L E M. II. *Positis quæ in superiore constructione, est $2EAX - AXq$ æquale $\frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$*

X 2

Notum

Notum est enim quod punctum γ motu regulae superius assignato describit Ellipsin cujus centrum est L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\epsilon$ sive $2GR$, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ sive $2GS$. Et horum ratio ad invicem ea est quæ linea HR ad lineam HL, sive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus transversum est ad latus rectum principale ut BE ad BC sive ut FI ad FH. Quare cum γ T ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipseos

$$GSq - LTq \text{ æquale } \frac{FI}{FH} T\gamma q. \text{ Est autem } LT \text{ æ}$$

quale AE - AX, & $T\gamma$ æquale $X\gamma - AH$. Scribatur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet

$$GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH} \text{ in } X\gamma q - 2AH$$

$\times X\gamma + AHq$. Est autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex GH + LS, propterea quod GS hypotenusa est trianguli rectanguli cujus latera sunt ipsæ AE & GH + LS aequalia. Est & (ob similia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo GH + LS ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex GH + LS, est ad GHq ut HLq ad HRq, hoc est (per constructionem) ut BEq ad BDq, id est ut BE ad BC, seu FI ad FH, adeoque quadratum ex GH + LS

æquale est $\frac{FI}{FH} GHq$. Est itaque $GSq - AEq$ æ-

quale $\frac{FI}{FH} GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH} GHq + 2EAX$

$- AXq = \frac{FI}{FH} \text{ in } X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Au-

feratur utrinque $\frac{FI}{FH} GHq$, & restabit $2EAX$

$- AXq$

$$-AXq = \frac{FI}{FH} \text{ in } X_2q - 2AH \times X_2 + AHq - GHq.$$

Est autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq = AGq + 2AGH + GHq$ & subductio utrinque GHq restat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc est $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, seu $= 2AG \times FH$,

$$\text{atque adeo est } 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH} \text{ in } X_2q - 2AH$$

$$\times X_2 + 2AG \times FH, \text{ i.e. } = \frac{FI}{FH} X_2q - \frac{FI}{FH} AH \times X_2 + 2AG \times FH. \text{ Q.E.D.}$$

LEM. III. *Eisdem positis est AX ad X₂ - AG ut X₂ ad 2BC.*

Nam si de aequalibus in Lemmate secundo subducantur equalia in Lemmate primo, restabunt

$$\text{equalia } 2CE \times AX \text{ & } \frac{HI}{FH} X_2q - \frac{FI}{FH} AH \times X_2$$

$$+ 2AI \times X_2. \text{ Ducatur pars utraque in FH, \& fiet}$$

$$2FH \times CE \times AX \text{ aequale } HI \times X_2q - 2FI \times AH \times X_2 + 2AI \times FH \times X_2. \text{ Est autem } AI = AH$$

$$+ HI, \text{ adeoque } 2FI \times AH = 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FHA - 2FHI. \text{ Sed } 2FI \times AH = 2FHA$$

$$= 2AHI, \text{ \& } 2AHI - 2FHI = 2HI \times AF. \text{ Ergo}$$

$$2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF, \text{ adeoque}$$

$$2FH \times CE \times AX = HI \times X_2q - 2HI \times AF \times X_2.$$

$$\text{Et inde HI ad FH ut } 2CE \times AX \text{ ad } X_2q - 2AF$$

$$\times X_2. \text{ Sed per constructionem HI est ad FH ut}$$

$$CE \text{ ad BC, atque adeo ut } 2CE \times AX \text{ ad } 2BC$$

$$\times AX, \text{ \& proinde } 2BC \times AX \text{ \& } X_2q = 2AF$$

$$\times X_2 \text{ (per Prop. 9. lib. V. Elem.) erunt equalia.}$$

Aequalium vero rectangulorum proportionalia sunt

latera, AX ad X₂ - 2AF, id est ad X₂ - AG ut

X₂ ad 2BC. Q.E.D.

LEM. IV. *Eisdem positis, est* $2FI$ *ad* AX *ut* $2AB$ *ut* Xy *ad* $2BC$.

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC \times AX = Xyq - 2AF \times Xy$, subducantur æqualia in Lemmate primo, & restabunt æqualia $-2AB \times AX + AXq = 2FI \times Xy - 2AG \times FI$, hoc est AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $Xy - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut AX ad $Xy - AG$, hoc est (per Lemma tertium) ut Xy ad $2BC$. Q.E.D.

Præstratis his Lemmatibus, Constructio Problematis sic eandem demonstratur.

Per Lemma quantum est Xy ad $2BC$ ut $2FI$ ad $AX - 2AB$, hoc est (per Prop. 1. lib. VI. Elem.) ut $2BC \times 2FI$ ad $2BC \times AX - 2AB$, seu ad $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. Sed per Lemma tertium est AX ad $Xy - 2AF$ ut Xy ad $2BC$, seu $2BC \times AX = Xyq - 2AF \times Xy$, adeoque Xy est ad $2BC$ ut $2BC \times 2FI$ ad $Xyq - 2AF \times Xy - 2BC \times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in se, fit $Xy \text{ cub.} - 2AF \times Xyq - 4BC \times AB \times Xy = 8BCq \times FI$. Addantur utrinque $2AF \times Xyq + 4BC \times AB \times Xy$, & fiet $Xy \text{ cub.} = 2AF \times Xyq + 4BC \times AB \times Xy + 8BCq \times FI$. Erat autem in constructione demonstranda, $\frac{1}{2}Xy$ radix æquationis dicta x , nec non $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{1}{2}$ & $FI = \frac{1}{2n}$, adeoque $BC \times AB = q$. Et $BCq \times FI = \frac{1}{4n}$. Quibus substitutis fiet $x^3 = p^2x^2 + qx + \frac{1}{4n}$. Q.E.D.

Corol.

Corol. Hinc si AF & AB ponantur nulla, per Lemma tertium & quartum fiet $2FI$ ad AX ut AX ad X_2 & X_2 ad $2BC$. Unde constat inventio duarum medie proportionalium inter datas quolibet FI & BC.

Scholium. Haftenus æquationis cubicæ constructionem per Ellipsin solummodo exposui: sed regula sua natura generalior est, sese ad omnes conic sectiones indifferenter extendens. Nam si loco Ellipseos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut ante, excepto tantum quod FH debet sumi ad partes ipsius F contra I, & quod HR non in linea HL, sed in linea AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro asymptotis Hyperbolæ. Cum istis itaque asymptotis LR, LR describe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendicularum ab eorum intersectionibus ad rectam AE demissorum erunt radices æquationis propositæ. Quæ omnia, signis + & - probe mutatis, demonstrantur ut prius.

Quod si Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capiendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A describenda, sito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B situm est respectu puncti C.

Sic sunt constructiones per Parabolam, si simplicitatem analyticam spectes, simplicissimæ ornamentum. Eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipsin

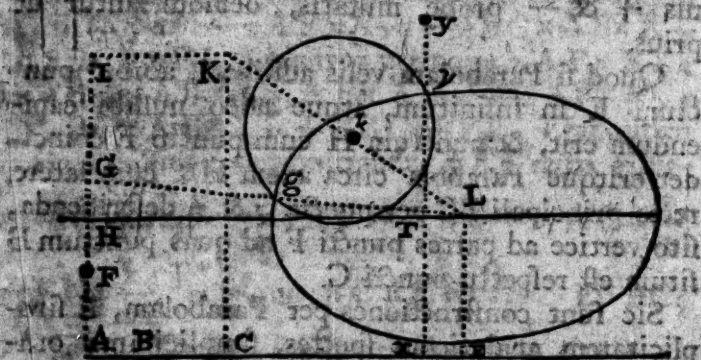
absol-

absolvuntur. Quod si praxeos manualis in describendis figuris spectetur simplicitas, mutandus est ordo.

In hisce autem constructionibus observandum venit quod proportionem lateris recti principalis ad latus transversum determinatur species Ellipseos & Hyperbolæ, & proportio illa eadem est quæ linearum BC & BE, atque adeo assumi potest: Parabolæ vero species est unica quam artifex ponendo BE infinite longam assequitur. Sic igitur penes artificem est æquationem quamcunque cubicam per conicam sectionem imperata speciei construere. A figuris autem specie datis ad figuras magnitudine datas devenietur augendo vel diminuendo in ratione data lineas omnes quibus figura specie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicæ per datam quamvis Conicam sectionem construere licebit. Id quod sic plenius explico.

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = px + qx \cdot r$, ope data cujuscunque sectionis conicæ construere.

A puncto quovis B in recta quavis infinita BCE, cape duas quascunque longitudines BC, BE ad eandem



partes si data Coni sectio sit Ellipsis, ad contrarias

si

si termini p & r habent eadem signa, aliter versus
 A. Deinde fac ut sit FH ad FI ut BC ad BE,
 & hinc FH cape à puncto F versus D si sectio sit
 Ellipsis, aut ad partes contrarias si ea sit Hyper-
 bola. Porro compleantur parallelogramma JACK
 & H A E L, & hæ omnes jam descriptæ lineæ trans-
 ferantur ad datam sectionem Conicam, aut quod
 perinde est, his superponatur curva, ita ut axis ejus
 siue transversa diameter principalis conveniat cum
 recta LH & centrum cum puncto L. His ita
 constitutis agatur recta KL ut & recta GL secans
 conicam sectionem in g. In LK cape Lk quæ sit
 ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg
 describe circulum. A punctis ubi hic secuerit
 curvam impositam demitte perpendiculara ad lineam
 LH, cujusmodi sit γ T. Denique versus γ ,
 cape TY quæ sit ad T γ ut LG ad Lg, & hzc
 TY producta secet rectam AB in X, eritque recta
 $\frac{1}{2}$ XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem ra-
 dices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB
 ad quas recta FI jacet à puncto F, & negativæ
 quæ jacent ad contrarias partes si modo habeatur
 $+r$, & contra si $-r$ obvenierit.

Hoc modo construuntur æquationes cubicæ per
 Ellipses & Hyperbolas datas: Quod si detur Parabola,
 capienda est BC æqualis lateri recto ipsius.
 Deinde punctis A, F, G, I & K inventis ut ante, cen-
 tro K intervallo KG describendus est circulus, &
 Parabola ita applicanda ad Schema jam descriptum
 (aut Schema ad Parabolam) ut ipsa transeat per
 puncta A & G, & axis ejus ipsi AC parallelus per
 punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius
 F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita
 constitutis, si perpendiculara ab ejus occurribus cum
 circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia
 erunt radices æquationis construenda.

Et notes quod ubi secundus æquationis terminus deest, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc constructio evadet eadem cum illa quam Cartesius attulit in Geometria sua, præterquam quod lineamenta hic sunt illorum duplicia.

Hæc est constructionum regula generalis. Verum ubi problemata particularia proponuntur, consulendum est constructionum formulis simplicissimis. Libera enim manet quantitas x , cujus assumptione constructio plerumque simplicior reddi potest. Ejus rei exemplum unum subjungo.

Detur Ellipsis, & inter datas lineas a & b invenienda sint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x , & $a.x.$ $\frac{xx}{a}$ b erunt continue proportionales, adeoque $a b = \frac{x^2}{a}$, seu $x^2 = a a b$ æquatio est, quam construere oportet. Hic desunt termini p , & q , & terminus r est aab , adeoque BA & AF nullæ sunt, & FI est $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus novissimus evadat simplicior assumatur $n = a$, & fiet $FI = b$. Deinde constructio ita se habebit.

A puncto quovis A in recta quavis infinita AE cape $AC = a$, & ad easdem partes puncti A cape AC ad AE ut est Ellipseos latus rectum principale ad latus transversum. Tum in perpendiculo AI cape $AI = b$, & AH ad AI ut est AC ad AE . Compleantur parallelogramma $JACK$, $HAEI$. Jungantur LA , LK . Huic schemati imponatur Ellipsis data. Secet ea rectam AL in puncto g . Fiat Lk ad LK ut Lg ad LA . Centro k intervallo kg describatur circulus secans Ellipsin in z .

Ad

Ad E demittatur perpendicularum K secans HL
in T & P productus in Y ut fit TY ad TP fit
cum
his duntaxat
illa duntaxat
tunc duntaxat



cut LA ad Lg . Sic fiet $\frac{1}{2} \text{XY}$ prima duarum me-
die proportionalium Q E I .

quam continue duntaxat. Hic debuit scribi A
et BA terminus est BA ad AF ut

le IY & FI est $\frac{1}{2}$ ut terminus notissimus

ut FI est $\frac{1}{2}$ ut terminus notissimus

FINIS

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

capo A I B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

capo A I B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

capo A I B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

capo A I B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

capo A I B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

capo A I B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

capo A I B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

capo A I B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z



